物理実験学

竹下徹　(05082004)

1.実験とは

導入

自然の理解＝物理学の目的<----- 理論　　　　　両輪
<----- 実験

理論： 概念・思想
方程式で表現　<----->　数値：実験
|　　|　　|
予言　---------->>> 検証　|
|
理論の変更あるいは破棄 <------------ 新発見
例１：マイケルソンモーレーの実験
---> アインシュタインの光速度不変の原理

例２：　ティコブラーエ測定データー＞ケプラーの３法則
---> ニュートン唐7万有引力の法則
予言：　海王星の存在

実験とは　　　実験の再現性:　同じ実験をやれば同じ結果がえられる
（同じが問題である：有限精度なので）
万人が認めることができる
数値ーデータ　：　実数　＜＜＜　精度　：　誤差

この授業の目的
ここの部分を考える
実験の実行：ーー複数の数値データーー＞結果　ーー＞結論
後期以降の物理学実験I,II,IIIで実際使う！
関数電卓を使用した授業となるが、データ処理が複雑になると、
電卓では手に終えなくなる。パソコンを使ったデータ処理も別の授業あるいは、自分で学べ。

１年生向けメッセージ：大学は、本来自ら学び掘り下げて行く所である。待っていては指事はこない、こないのは、何もしなくてもいいってことじゃな い！自分で考え、押し進めてて行く事を、回りは仮定している。高校では、大学を目標に問題を解いていれば良かったのではないか？　大学ではすべて（授業 も、生活も）に渡って自分で考え行動することを求められてい

る。授業では、先生を使え、聞け！ただし質問を考えるのは君だ！ただしこの授業では、なん と か、自分で始める癖をつけるようにしむけたい。

単位：試験２回＋授業中の宿題：ちゃんと勉強しないと単位はない、大学では絶対評価である。

データとは

測定・実験結果あるいは途中に現れる数値

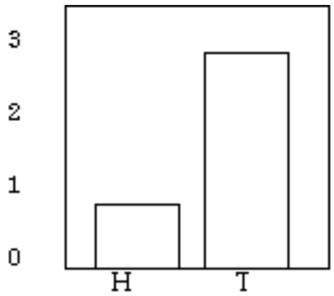
一般に数値ーデータは　実数　で　　精度　を持つ　　：　誤差と呼ぶ人もいるが。

観測や測定から得られる：ーーー整数型　不連続量：例コイントス実験：ここでは精度がない。

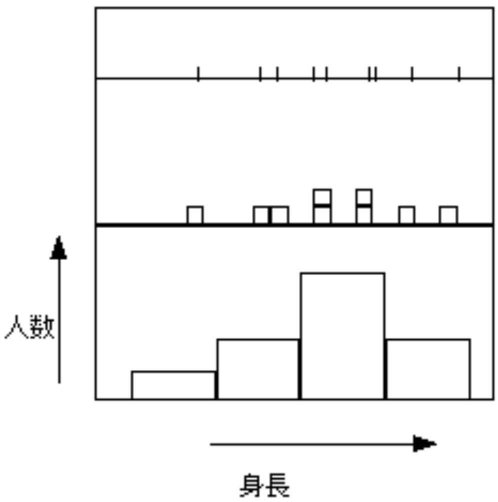
ーーーー実数型　連続量：　例：長さの測定実験：精度が問題。

データの視覚化

整数型データ：４回のコイントスで、H,T,T,Tと出たとしよう、ここで何回「でたか」に興味があるときは、棒グラフを描く



実数型データ：みなさんの身長、１人１人のデータではなく、その全体像！に興味があるとき、　　ヒストグラムを描く：bin bindingの問題:有限精度を考慮：たとえば、1mmまで目盛ってある物差をつかって身長をはかった場合、細小目盛りの1/10まで読み取れると通常 する。
例：173.44cmここで実数値といえども有限精度である。
173.435より大きく173.445より小さい範囲にある時である。この幅を考慮したbindingが図の上から中である、下は全体をみわたすとき便 利

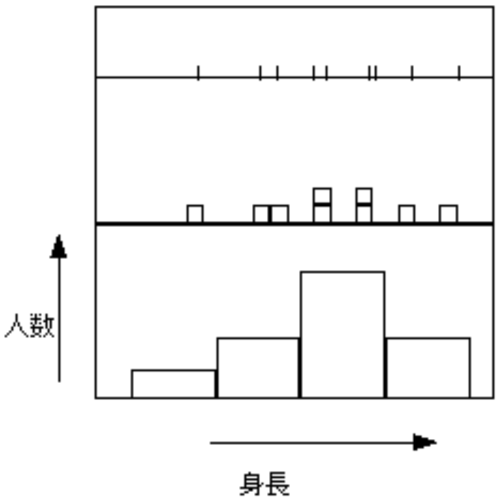


データの代表値は

数値ーデータ　：　実数

同じ質の複数のデータ（データの組み）の代表値

実数型データ：たとえばみなさんの身長で、１人１人のデータではなく、代表値を一つあげよ、という場合どうするか？図で、一番上ではみんな平等（横 幅大変小さい）にしたので、代表をだせない。（一番高い（あるいは低い）のが代表できるか？）



図の下側ように横幅を考慮してまとめると、２つぐらい代表値の取り方が考えられる。
（１）一番高いビンをその代表値とする。（これじゃ、ここのデータの値をあまり考慮してない)
（２）平均をとる

平均：n個のデータのとき、

データをxi (i=1,,,,n) について　　x=(x1+x2+...+xn)/n

=S(xi)/n

を算術平均と呼ぶ。

平均は算術平均が全てではないのだ！

重み付き平均：上の平均は或いは算術平均は重み付き平均の特殊な場合である、つまり各データに重みが付与されているような場合でこれをwiとしよ う。

$$\overline{x}_W = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

こ の式で定義する平均を重み付き平均と呼ぶ。例えば１アンペアが最小目盛りの電流計で読んだ値と0.1アンペアまで読める電流計の結果の平均値を求めよと言 われたとき、両者は同一に扱う理由はない。0.1アンペアまで読める電流計の結果を尊重し大きな重みを加えるべきであると判断すればこれを用いる。

調和平均：　　xchouwa=n/(1/x1+1/x2+....+1/xn)
平均の速さはこれ。つまり距離L(m) 離れた二点AとBがあり、AからB へ行くときは一定の速さv1(m/s)で歩き、帰る時BからAへは、一定の速さ v2(m/s)で歩いたとしよう。このとき往復の平均の速さはいくらか？そもそも速さは移動距離をそれに要した時間で割った二次的な物理量なので単純な算 術平均ではだめなのだ。行きに架かる時間t1=L/v1であり、帰りに要する時間t2=L/v2である、従って平均の速さV=2L/(t1+t2)=2/ (1/v1+1/v2)となり調和平均の式なる。
相乗平均：
xsoujyou=(x1x2....xn)1/n 1/n乗根
各年の生産高の年平均なん倍になりましたか？はこれ

２乗平均
xrms=sqrt((x12+x22+...xn2)/n)

注意：平均値の単位はかならず、データの単位と同じ。物理学では数値は必ず、単位を持ち意味を持つ。
平均値は複数の数値データの代表値である、従って、同じ単位をもつべし、
さらにi番目のデータが別の順番で現れても結果は同じはずであり、入れ替えに関して対称であるべきである。その意味で上記、算術平均、調和平均、相乗平均、重み付き平均は全てこの条件を満たす。どの数値の場合どの平均を取るべきかは、数値の出所による。例えば、抵抗の並列つなぎの計算は調和平均だし、増倍率などの平均は相乗平均を取るべきである。また重み付き平均は、この授業で最も重要で後に議論する。
何かの長さをはかれ、図を描け、代表値を出せ。 物差を持たない者は工夫せよ。
例：　　ある高さから物体を落下させ、gをを測定する。
h=gt2/2 :これを理論として、検証できるか？
g=2h/t2 : hとtを測定すればよいはず。
関数電卓を入手してください！今後この授業そして、実験で必ず使います。
乱数発生のできる機能付き物が望ましい。
ここまでの宿題：ものの長さを測れ。

レポート例：「ものの長さを測る」

A4様紙の横（短い方向）の長さを測定する。

測定は、同じ紙の同じ程度の位置にて複数回おこなう。そのさい、物差しはその都度いったん紙から離す。物差しの最小メモリは1mm.

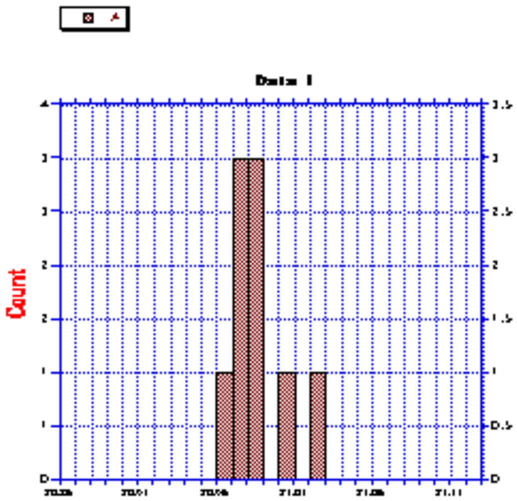
方法１：ゼロ点を合わせて、長さを読む。
方法２：任意の位置に物差しを置きｫ、長さは位置の差で計算する。

方法１：データ　　　　　　　　方法2：データ

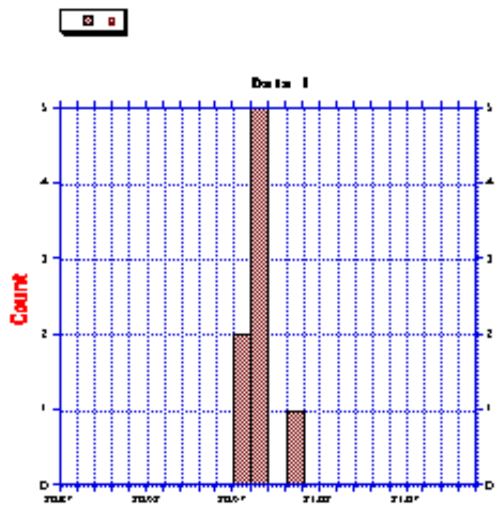
回数	長さ（ｃｍ）	左の位置読み	右位置読み	長さ（ｃｍ）
1	20.97	4.16	25.14	20.98

2	20.99	0.80	21.79	20.99
3	20.98	3.92	24.41	20.49
4	20.98	1.32	22.32	21.00
5	20.99	6.94	27.93	20.99
6	21.00	3.58	24.56	20.98
7	21.02	2.49	23.48	20.99
8	20.99	4.91	25.90	20.99
9	20.98	5.03	26.02	20.99

平均値　　20.989= 20.99 cm 20.989=20.99cm（３番目のデータなし）
標準偏差　0.015　= 0.02cm 0.007 = 0.01cm
結果：両者は同等で、長さは、20.99ｃｍである。



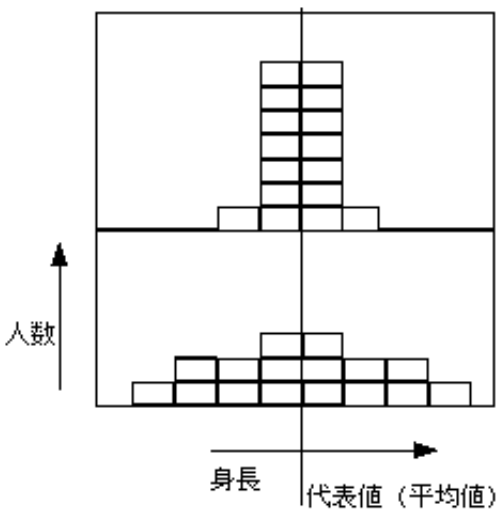
方法1



方法2

データの図式化。

複数の数値データの広がりをあらわす量



右図は同じ代表値（平均値）の２つの
　　分布だが
同じではない！
違い＝（分布の）ひろがりをあらわす量を考えよう！

平均：n個のデータのとき、

データをxi (i=1,,,,n) について $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ を平 均と呼ぶ。

「ひろがり」をあらわす量として
平均値からのずれ（差）を足しあげればよい！
がしかし

$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})$ は不適切である。

なぜなら

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{x}$$

$$= \bar{x} - \bar{x}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 1 = \bar{x} - \bar{x} * \frac{N}{N} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

新しい量 $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ を考える。

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2x_i\bar{x} + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{2\bar{x}}{N}\sum x_i + \bar{x}^2$$

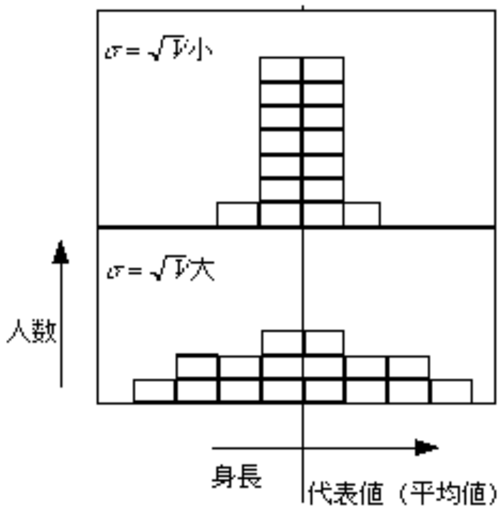
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\overline{x}\overline{x} + \bar{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$$

これをVariance　分散　と呼ぶ $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = V$

また標準偏差　を $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$ と定義する。分散の平方根とし て定義する。

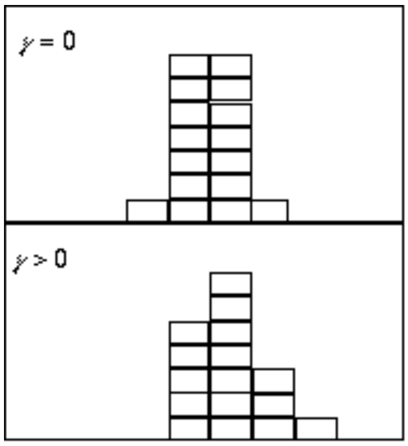
複数の数値データの広がりをあらわす量（その２）

平均値：$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$



分散：$V=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$ $=\overline{(x-\bar{x})^2}$

skew: $\gamma=\frac{1}{N\sigma^3}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^3=\frac{1}{\sigma^3}\overline{(x-\bar{x})^3}$



skewはdimensionless 無次元量
代表値の周りの分布の広がりの左右非対称度を示す。

(x-x)r は代表値の周りのモーメントという、
r=1: を力学の言葉では重心である、
r=2:　は　力学では、慣性モーメントと呼ぶ。

2つの量の間の関係：複数の数値データの組み(xi,yi)の扱い
今までのデータは、一つの数値(xi) を測定した場合
であった、　　２つのデータの組み(xi,yi)を測定
する場合を考えよう。たとえば、xi=ある人の身長、yi=その人の体重。この場合iは人が同じであることを表し、xiとyjは本来無関係である。
これらのデータの組みを　{(x1,y1),(x2,y2),......(xN,yN)}　と表す。
ここで$\bar{x}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i$ $\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i$ $\sigma_x{}^2=\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})^2$ $\sigma_y{}^2=\frac{1}{N}\sum(y_i-\bar{y})^2$

例えば、身長と体重などの量のように関係が
推測されるものがある、これを次のように定義し
導入する。$\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\mathrm{cov}(x,y)$ $=\overline{xy}-\bar{x}\bullet\bar{y}$ ここで

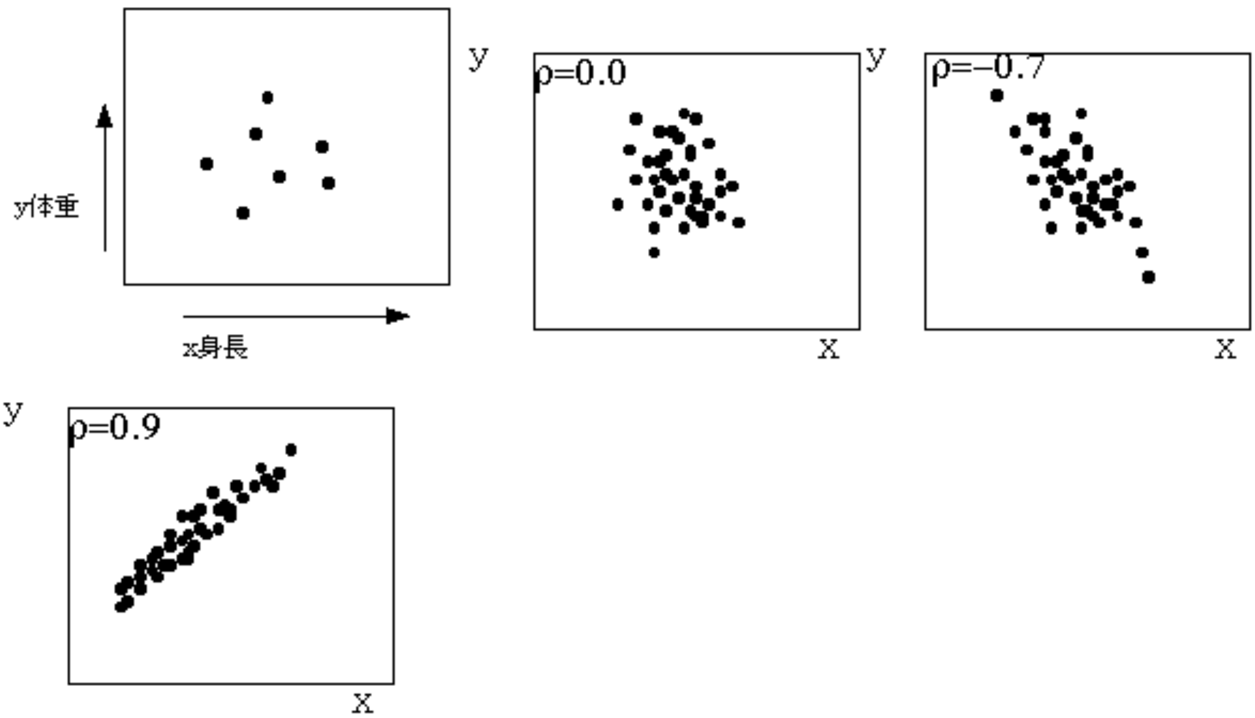
$$\overline{xy} = \frac{1}{N}\sum x_i y_i$$

cov(x,y)の単位は、xの単位かけyの単位である。つまり、無次元量ではない。それも妙な単位である（例の身長＝x、体重＝yの場合、covの単位はm＊kgとなり、物理量として意味を持たない。）こういう時は、無次元量にしてしまう方がよい。

$$\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_x\sigma_y}$$

これを相関係数と呼ぶ。

この量は無次元量で、-1から１の間にある。



問題：身の回りの関係のありそうな２つの量をさがし、両者の関係を議論せよ。

物理実験学　　10/April/2003 質問表まとめ

正しい字：離散、幅、頻度

質問：「最小目盛りの1/10まで読めというのはなぜか？」
答え：　確かに目分量になります、それでもその数値をいくらといくらの間と答えたのでは答えになりません、また中間をとって xxx.5としても違いますよね！それで無理矢理1/10まで読んで下さい。これが物理学を実験する上で常識です。その結果をどう考えるかは次回はなします。

質問：「ヒストグラムのビン幅は、何を基準に決めるのか」
答え：　　ヒストグラムはデータの全体像を把握するための視覚化を行います。ですから全体像が見えるようにビン幅を決めます。一般にデータ全体を１０個程 度のビンに分けるのが全体

像を見えやすくします。

「質問：なぜ実数は連続量というのか？」
答え：　　実数は小数点以下無限の数値がつながった存在です、ですからその数値よりほんの少し大きな別の実数、あるいはほんの少し小さな別の実数が存在 し、実軸上を無限に覆い尽くしています。　例えばあるものの長さをいくらか、という問いに対して、答えは本当の長さは無限に精度が良ければ無限に数値がな らんで長さはこれこれというべきでしょう、その意味で我々は実数を相手にしています。

質問：「ありません」
答え：　　それでも質問をひねり出すのが質問票ですので、無理してください。

物理実験学　　17/April/2003 質問表まとめ

　正しい字：

質問：「どうしてたくさんの平均の取り方が存在するのか？」
答え：　それは対象とする物理量にいろいろな単位を持った種類があるからです。調和平均の場合について次に述べます。

質問：「調和平均とは？」
答え：F　調和平均の式は次のような場合に現れます。それは距離がL(m)はなれた２点A,Bについて、行き(AｴB)は平均の速さV1(m/s)で歩 き、帰り(BｴA)は平均の速さV2(m/s)で歩いたとしましょう、さて平均の速さはいくらでしょう？。というとき、$=\frac{1}{2}\left(V_1+V_2\right)$と答えますか？　歩いた距離をかかった時間で割った価が平均の速さですから、$=\dfrac{L}{\dfrac{L}{V_1}+\dfrac{L}{V_2}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{V_1}+\dfrac{1}{V_2}}$ってものでしょう！V1,V2をx1,x2に置きかえると理解しやすいですか？この ように関係する物理量の持つ単位などにより計算は適切に行われなければなりません。

「質問：三乗平均を計算刷るのはなぜか？」
答え：二乗平均でたしかにデータの分布の拡がりを表すパラメータを計算刷ることができました。しかしこのｧときは二乗を取ったので、算術平均の値の左右に 対称に距離だけを計算しています、左は左だえで足しあげるには符合を不可しなければ鳴りません、こういうとき三乗が役立ちます。つまり、左右非対称な分布 の拡がりを表すことのできる量が三乗平均（スキュー）です。私のノートをﾛｩてください。http://atlas.shinshu-u.ac.jp/

質問：「偏差値と標準偏差の違いはなにですか？」
答え：　偏差値をSi,標準偏差をsとすると、両者には次の関係があります。$S_i=10\times\dfrac{(x_i-\bar{x})}{\sigma}+50$

つまりあなたの得点xiと平均点*の距離（離れ具合）を標準偏差で割って１０倍し平均値を５０へずらした。偏差値５０の人は平均だ、偏差値６０の人は平均より１標準偏差ずれたところにいる！

物理実験学

竹下徹

数値データと真の値の関係

我々の測定は、ある量の正しい本当の値＝真の値があり、これを見つけることを目的に行われる。　　しかし、測定の回数は有限であり、そのたびごとに 異なる（もちろん測定装置の精度内で一致することもあるが）のが常識である。
では真の値はこの有限回で異なる数値の測定からどうやって導くべうきか？

ある種の信念かも知れないが、ここでは、法則があると思う。それは
有限回の測定をつづけ無限回に達したとき得られる答えが、真の値である。
すなわち、　有限回(N回)の測定から得られた平均値、や　標準偏差　は
　N->∞　で真の値とその分布の標準偏差と一致する。

これを「大数の法則」という。

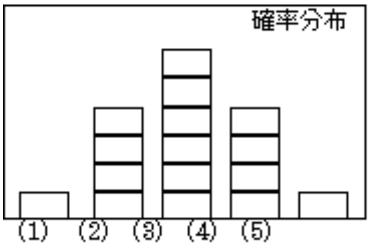
真の値が測定の結果となるべきである、は当然である。
しかし、分布とはなんだ！？　　真の値を得る過程で測定の複数回のくり返しは、有限の標準偏差＝ひろがりを持つ。-----ただしどういう形の分布である かは、今は分からない。

で、分布とは、
例として、　　４枚のコイントスを考える。ただし、コインの区別はつかないとしよう。とすると、結果は４種類に分類される。この場合、離散型のデータなの で状態（結果）は有限の種類となる。その5種は、４枚のうち、
(1)４枚とも、H, (2) 3枚H,(3)2枚H,(4)1枚H,(5)0枚H＝この場合全部Tということ。
ただし、分布は、この種類のそれぞれの棒グラフの高さ（回数）をグラフにして表される。ーーーー＞実験せよ！そして有限回の分布を示せ。

仮定：すべてのコインはHとTのでる確率はそれぞれ1/2=0.5
(1)４枚とも、H　：場合は、１通り、(HHHH) この確率＝P(4)=(1/2)4=1/16=0.0625
(2) 3枚H　：　　場合が４通り＝(HHHT,HHTH,HTHH,THHH) P(3)=4*(1/2)4=4/16=0.25
(3)2枚H ：　場合は、６通り=(HHTT,HTHT,HTTH,THHT,THTH,TTHH)
P(2)=6*(1/2)4=6/16=0.375
(4)1枚H ：　場合が４通り＝(TTTH,TTHT,THTT,HTTT) P(1)=4*(1/2)4=4/16=0.25

(5) 1枚H １通り、(TTTT) この確率＝P(0)=(1/2)4=1/16=0.0625

全確率は１でなくてはならない。P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)=
0.0625+0.25+0.375+0.25+0.0625=1.000

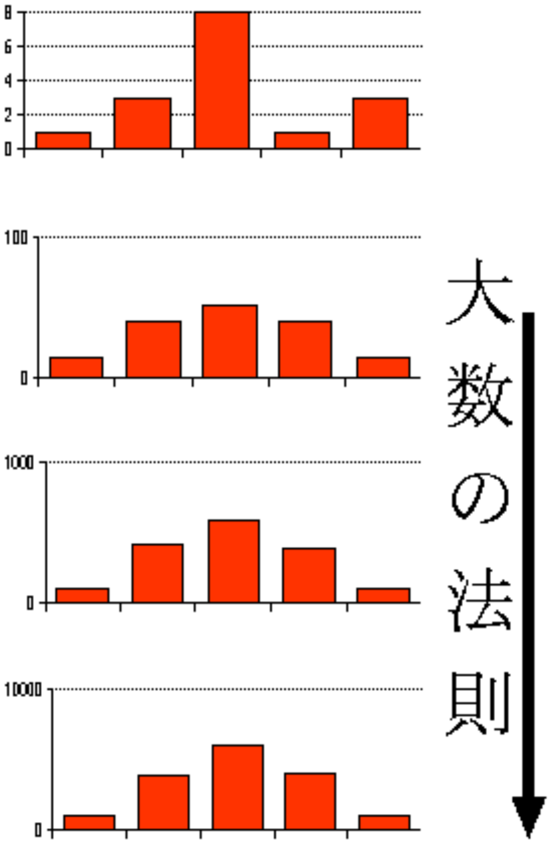


確率分布と確率変数（整数型）

分布とは、 離散的な場合
例として、　　４枚のコイントスを考える。ただし、コインの区別はつかないとしよう。とすると、結果は４種類に分類される。この場合、離散型のデータなの で状態（結果）は有限の種類となる。この種類を表す下図を確率変数という。確率変数　5種は、４枚のコインのうち、(1)４枚とも、H, (2) 3枚がH,(3)　2枚がH,(4)　1枚がH,(5)　0枚がH =この場合全部Tということ。ただし、分布は、この種類のそれぞれの棒グラフの高さ（回数）をグラフにして表される。
実験してみる。16回ー４つのコイントスを行った結果、Tが出た回数(0)1回,(1)3回,(2)8回,(3)1回,(4)3回、160回ー４つのコイ ントスを行った結果、
Tが出た回数(0)14回,(1)40回,(2)51回,(3)41回,(4)14回、1600回ー４つのコイントスを行った結果、Tが出た回数(0) 97回,(1)414回,(2)586回,(3)397回,(4)106回、16000回ー４つのコイントスを行った結果、Tが出た回数 (0)988回,(1)3935回,(2)5927回,(3)4094回,(4)1056回。

回数を増やすほど理想的な分布に近づくことが想像できる。無限回の試行は理想分布に一致するはずというのが、大数の法則である。横軸に確率変数を取 り、縦軸に確率を取ったグラフがつぎである。

0 T H H T 2
1 T H T H 2
2 H H H H 0
3 H H T T 2
4 T T T T 4
5 T H T H 2
6 H T T H 2
7 T T T T 4
8 T T T T 4
9 H H H T 1
10 H H T H 1
11 H T T H 2
12 T T T H 3
13 H T H T 2
14 H T H F 1
15 H T T H 2
16 1 3 8 1 3



期待値とは、

例として、　　４枚のコイントスを考える。可能な状態は次の５通りである。すなわち４枚のうち、
(1)４枚とも、H, (2) 3枚がH,(3)　2枚がH,　(4)1枚がH,　(5)0枚がH＝この場合全部Tということ。
各の確率は、P(1)=0.0625(1/16),P(2)=0.25(4/16),P(3)=0.375(6/16),P(4)=0.25 (4/16), P(5)=0.0625(1/16)であることは計算した。
ここで、１回だけ試したとき出る可能性r枚表の期待値<r>を次のように定義する。いままでxiというデータの平均を取る作業と同じことを、 確率という重みを付けてとることに相当する。

$$<r>=\sum_r rP(r)=0P(0)+1P(1)+2P(2)+3P(3)+4P(4)$$

$$=0+\frac{4}{16}+2\frac{6}{16}+3\frac{4}{16}+4\frac{1}{16}=\frac{4+12+12+4}{16}$$

$$=\frac{32}{16}=2$$

この<r>は表の回数の期待値 と呼ばれる。 これは必ずしも確率の最大の値ではない。（ここでは、偶然一致しているが、、一般には　<r>は整数とは限らない。データの代表値と分散あるいは標準偏差を議論したように

データの広がりを表す。

$$S^2 = < r^2 > - < r >^2$$

$$= \sum r^2 P(r) - \left(\sum r P(r)\right)^2$$ <r2>は２乗平均であり

$$< r^2 > = \sum r^2 P(r) = 0 + 1^2 \frac{4}{16} + 2^2 \frac{6}{16} + 3^2 \frac{4}{16} + 4^2 \frac{1}{16}$$

$$= \frac{0+4+24+36+16}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

よって

$\sigma^2 = < r^2 > - < r >^2$ =5-4=1　となる。

確率分布：連続変数の場合の連続分布

次に　rが連続あるいは実数値を取る場合を考える。同じ計算ではまず事は明らかである。
例えば棒の長さを測ったとき、（長さxは連続値を取りう る）
長さが11cmという意味を考えよう。これは、最小メモリが10cmの物差しで測ったなら、
10cm〜12cmの意味（ここで〜は、その間ﾔのどこかと いう意味）である。
　しかし、最小メモリが1cmの物差しで測ったなら、　10.5cm〜11.5cmの意味
　　　　　最小メモリが1mmの物差しで測ったなら、　10.95cm〜11.05cmの意味
のように色々な言い方が可能である。（有効数字をさておいて）

そこでも確率を定義する、Aただし上の例のように連続量は、ある値からある値の間にあることを持って、話しをする。すなわち　測定量xがx1から x2の間にある確率を
P(x1,x2)として与える事のみができる。ただし、次の式を考え $\hat{P}(x)$ を本 質と考える。

$\hat{P}(x)$ を確率密度関数と呼ぶ。 $P(x1, x2) = \int_{x1}^{x2} \hat{P}(x) dx$ $\hat{P}(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x, x + \delta x)}{\delta x}$ こ う言っても良い。
注意 確率P(x)は無次元量であるので、

$\hat{P}(x)$ は x の次元の逆数である： $[\hat{P}(x)] = \frac{1}{[x]}$
さてこれでようやく、xの期待値を計算する準備ができた。

　xの期待値<x>は離散的な場合と同様に x のその期待値をかけて和を取ればよい、が

xは連続量なので、積分を用いる。 $< X >= \int_{-\infty}^{\infty} X\hat{P}(X)\,dX$ 同様に標準偏差 σ^2 は

$$\sigma^2 =< X^2 > - < X >^2$$

$= \int X^2 \hat{P}(X)\,dX - (\int X\hat{P}(X)\,dX)^2$ と かける。 $\hat{P}(X)$ の具体例は次の章で示す。

宿題：離散的確率分布する場合の例を２つ以上考え、その期待値と標準偏差を計算せよ。
　　　実際可能なら実験し、その理論分布と実際を比較せよ。
　　　ヒント：一つは、一様分布と呼ばれ、サイコロや転がり鉛筆の場合である。

物理実験学　　24/April/2003 質問表まとめ

　正しい字：乱数

質問：「<r2>-<r>2で広がりを求めていますがどういう意味があるのですか？」
答え：　データxiが与えられてその平均値x。と二乗平均 $\overline{x^2}$ が計 算されたとき標準偏差 $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \overline{x})^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ が広がりを表すように、確率が与えられた場合 <r2>-< r>2が確率分布の広がりを表す量となる。

$$S^2 =< r^2 > - < r >^2 = \sum r^2 P(r) - \left(\sum r P(r)\right)^2$$

と

$$\sigma^2 = x^2 - \overline{x}^2 = \sum x^2 \frac{1}{N} - \left(\sum x \frac{1}{N}\right)^2$$

はP(r)=1/N

で同じにみえませんか？
大数の法則を使って多数の測定から「真の価」を知りたいとき測定は確率で表現されるため、この形を使います。ヒストグラムを使って積みあげてゆくと全体数 で各ビンの高さを割った値つまり確率を用いることになります。従って両者は異なる物ではなく、同一と考えられましょう。

　　また重み付き平均を使うと、 $\overline{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$ 、ここでwiの代わりに確率P(xi) を使い、確率の和は１となるべしという要請をおけば、分母は自動的に１となり式は $\overline{x}_w = \sum x_i P(x_i)$ と なります。これはxiを r に置きかえれば同じ式でナす。このように同じ式も変数名を変えると違う式に見ないように練習してください。

物理実験学　　24/April/2003 質問表まとめ

正しい字：乱数

質問：「$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ で広がりを求めていますがどういう意味があるのですか？」

答え：　データxiが与えられてその平均値x。と二乗平均 $\overline{x^2}$ が計 算されたとき標準偏差 $\overline{x^2}$ が広がりを表すように、確率が与えられた場合 <r2>-< r>2が確率分布の広がりを表す量となる。

$$S^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \sum r^2 P(r) - \left(\sum r P(r)\right)^2$$

と

$$\sigma^2 = x^2 - \bar{x}^2 = \sum x^2 \frac{1}{N} - \left(\sum x \frac{1}{N}\right)^2$$

はP(r)=1/N

で同じにみえませんか？

大数の法則を使って多数の測定から「真の価」を知りたいとき測定は確率で表現されるため、この形を使います。ヒストグラムを使って積みあげてゆくと全体数 で各ビンの高さを割った値つまり確率を用いることになります。従って両者は異なる物ではなく、同一と考えられましょう。

　また重み付き平均を使うと、$\bar{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$ 、ここでwiの代わりに確率P(xi) を使い、確率の和は１となるべしという要請をおけば、分母は自動的に１となり式は $\bar{x}_w = \sum x_i P(x_i)$ と なります。これはxiを r に置きかえれば同じ式でｹす。このように同じ式も変数名を変えると違う式に見ないように練習してください。

物理実験学　　30/April/2003 質問表まとめ

質問：「確率密度関数 $\hat{P}(x)$ の意 味がわかりません？またなぜ妙な単位を持つのですか？」

答え：　連続量に対する確率を定義する事ができません。出現する場合の数が有限な離散分布（例えばサイコロの目の出現確率分布は６個の場合の数しかりませ ん）の場合はそれぞれの場合を現す数ｒ（サイコロの目ならr=1,2,3,4,5,6)について対応する確率 $P(r)$ を定 義できる。しかし連続量では出現する場合の数は無 限大　（∞　infinite）です、その場合出現する場合を現す変数　x　の関数である確率をどうすれば定義できるでしょうか？そこで確率 密度は $\hat{P}(x)$ を導入して、連続量xが x1< x < x2　にある確率は原理的に定義可能で、その確率を　　次のよ

うに定義しよう。 $P(x: x1 < x < x2) = \int_{x1}^{x2} \hat{P}(x)\,dx$ 従って自動的に確率密度関 数 $\hat{P}(x)$ はdxをかけて確率になる し、確率は単位がないので、 $\hat{P}(x)$ は dxの単位の逆数となります。この定義はいままで離散的な場合の数の場合に定義し他方法と全く類似して定義できます。
全て左の連続量と右の離散量が対応していることに注意してください。

質問2：「重み付き平均の例はありますか？」

重み付き平均を使うと、 $\bar{x}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$ 、 と書かれます。サイコロの目(1,2,3,4,5,6)をxiが取るとき、複数回サイコロを振って（その目の値をyiとしよう）その平均は $\bar{y} = \sum_{i=1}^{N} y_i$ とでますが、これをヒストグラム化して、yiは必ず１ から６までの整数ですからxiにヒストグラムとします。wiは目xiが出た回数となり、平均は重み付き平均となります。つまりヒストグラムの場合エント リーしたそれぞれを１と数えるならwiは１の何倍のエントリーがあったのかと言うことになり、全体の平均はwiの重みを付けて重み付き平均を求めることに より計算できます。

質問3：「有効数字で四捨五入するときはありますか？」
有効数字とは測定できて信頼できる数字、または精度があると考えられる数字のことです。たとえば　1mmまで測定できる物差しで測った長さを最小目盛りの 1/10まで読めというのは、有効数字が小数点下１桁（mm単位で）であり、最後桁の値は＋１あるいはー１ずれるかもしれないとおィもって使うことを意識 してください。正し計算の途中では四捨五入を繰り返さない方が結果に信頼性が生まれます、なぜならに途中で減算（引き算）が含まれる 場合は精度がわるくなる可能性が高いからです。最終結果は必ず有効数字で表してください。つまり途中は１桁大きく計算してきた結果を四捨五入して有効数字 に丸めてください。しかし、標準偏差を計算してみると、ここでは減算 $<x^2> - <x>^2$ が 効いてくるので、ほとんど ゼロに近くなり、有効数字が現れないことがあります、例えば $<x> = 10.23, \sigma = 0.0024$ こういう時は標準偏差を小 数点下２桁にするべきですが、丸めると $\sigma = 0.00$ とな ります。Bこの値は精度を表す量なので切り上げ標準的です、従って $\sigma = 0.01$ と答 えてください。

質問4：「πの有効数字は何桁ですか？」
πの値や，物理定数を使う場合には，計算する最大桁の有効数字よりも1桁以上大きな値を使って計算してください。例えば

4πr2 = 4×3.1416×(2.674m)2 = 8.985m2　　ここでπは5桁とりました、なぜなら2.674に４桁あるからです。また上の計算で，最初の４は1桁の有効数字というわけではありません、4.0000と扱っています。

物理 実験学

竹下徹　(05082002)

確率分布：二項分布

まずは離散分布の代表格の　二項分布を取り上げる。
二項分布とは、n回　試行するとき、r回成功する確率分布である。
　ただし、各回の成功確率をpとしこれは一定であるとする。
　　ということは、例えば3回試行し、１回成功する場合は３とおりあるが、どれも同等と扱って良いことにする。つまり順番の入れ替えは結果の確率には影 響しない、○xx　、x○x、xx○の３つは同じ確率であると考える。　ここで○は成功を表し、x　は失敗を表す。４個のコイントス問題も、試行順と考慮し ないということと、コインを区別しないという事で、同じである。

　一般にn回　試行し、r回成功する場合の数は、$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 通るある（このときは区別して数える）。またn回中r回成功する確率は、$p^r(1-p)^{n-r}$。 よって入れ替えを同等としたn回試行するとき、r回成功する確率は $P(r;p,n) = \frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}$ とかける。さて確率であるからには、全確率は１で無ければならな い。これを示す。すなわち、

$$\sum_{r=0}^{n} P(r;p,n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r} = \left[p+(1-p)\right]^n = 1^n = 1$$

こ の式は　(x+y)のn乗の展開式である。x=p,y=1-p

では、その期待値<r>は？ $<r> = \sum_{r=0}^{n} rP(r;p,n) = \sum_{r=0}^{n} r\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r}$ ここでr=0のときは和に寄与しないゼロなので、和をr=1〜n までとる、さらのnpは定数なので外へ出して、

$$<r> = np\sum_{r=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}p^{r-1}(1-p)^{n-r}$$

ここでr'=r-1,n'=n-1と置き換える。

$$<r> = np\sum_{r'=0}^{n'} \frac{n'!}{r'!(n'-r')!}p^{r'}(1-p)^{n'-r'}$$

こ れは全確率の計算と同じだ。つまり、

$$<r> = np\left[p+(1-p)\right]^{n'} = np1^{n'} = np$$

期待値はnpであることが解る。

離散分布の代表二項分布は、n回試行するとき、r回成功する確率分布である。
　ただし、各回の成功確率をpとしこれは一定であるとする。
期待値*<r> =npを計算した。
同様に標準偏差$\sigma^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$　を計算しましょう。トリックは期待値で使ったのと同じのを使います。

$$= \sum_{r=0}^{n} (r - <r>)^2 P(r;p,n) = \sum_{r=0}^{n} r^2 \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} - <r>^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n} r \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r} - <r>^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 P(r;p,n) - (np)^2 = np \sum r \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} p^{r-1} (1-p)^{n-r} - <r>^2$$

ここで例によって,npを引き出した。さらに置き換えを行う；n'=n-1,r'=r-1,n-r=n'-r'

$$= np \sum_{r'=0}^{n'} (r'+1) \frac{(n')!}{(r')!(n'-r')!} p^{r'} (1-p)^{n'-r'} - <r>^2$$

$$= np[\sum_{r'=0}^{n'} (r') \frac{(n')!}{(r')!(n'-r')!} p^{r'} (1-p)^{n'-r'} + 1] - <r>^2$$

$$= np[\sum_{r'=0}^{n'} \frac{(n')!}{(r'-1)!(n'-r')!} p^{r'} (1-p)^{n'-r'} + 1] - <r>^2$$

大かっこの中の[]第２項はいつものもの、のこり第１項をまたトリックを使って計算するとr''=r'-1,n''=n'-1,n'-r'=n''-r'' を使って、

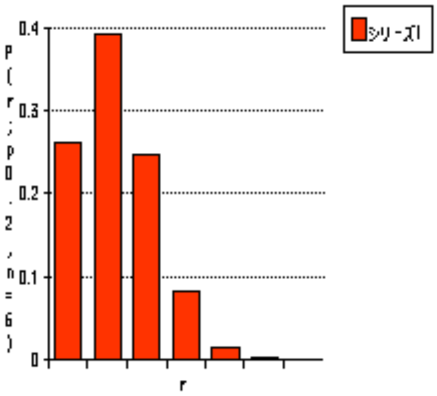
$$= np[n' p \sum_{r''=0}^{n''} \frac{(n'')!}{(r'')!(n''-r'')!} p^{r''} (1-p)^{n''-r''} + 1] - <r>^2$$

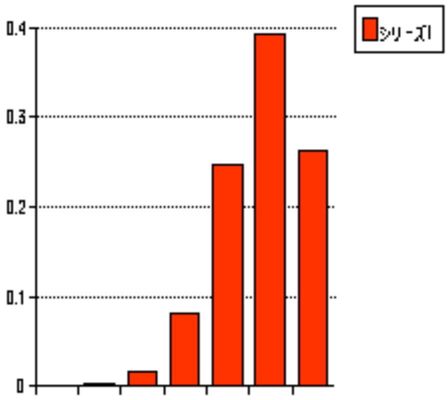
$$= np[(n-1)p + 1] - (np)^2$$

$$= np[np - p + 1] - n^2 p^2$$

$$= -np^2 + np = np(1-p)$$

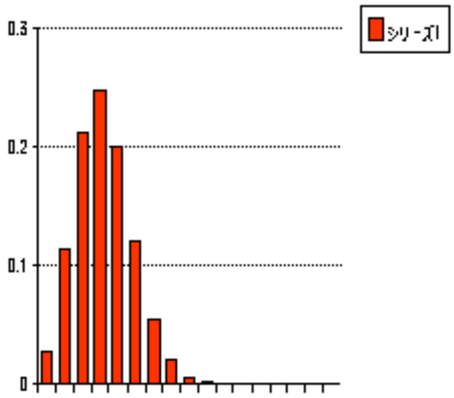
二項分布P(r;p,n)の分布のようすを示すグラフを描きましょう。　横軸はr,縦軸は確率P(r;p,n)です。下にその例を示します。



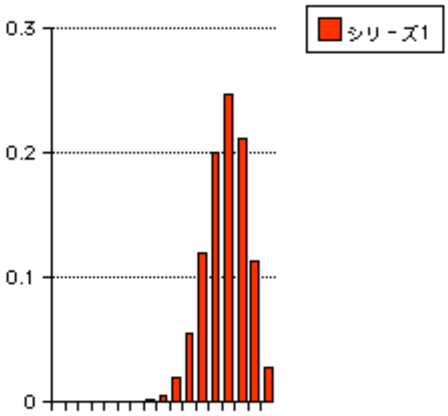


上 はn=6に対する、

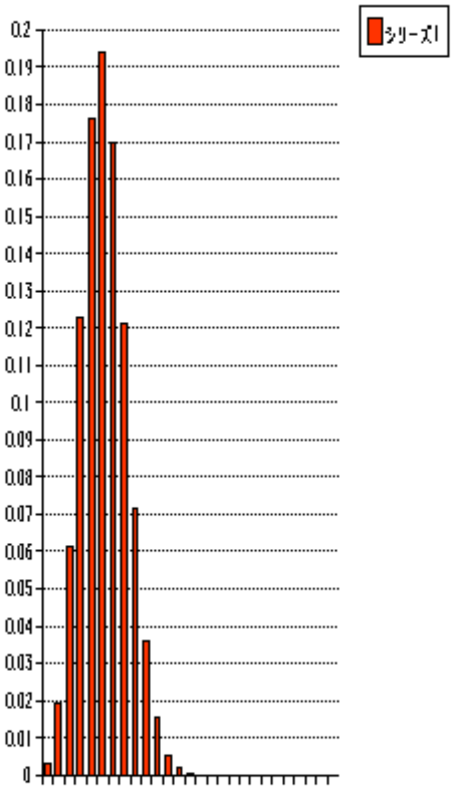
p=0.2（左）と0.8(右）です。

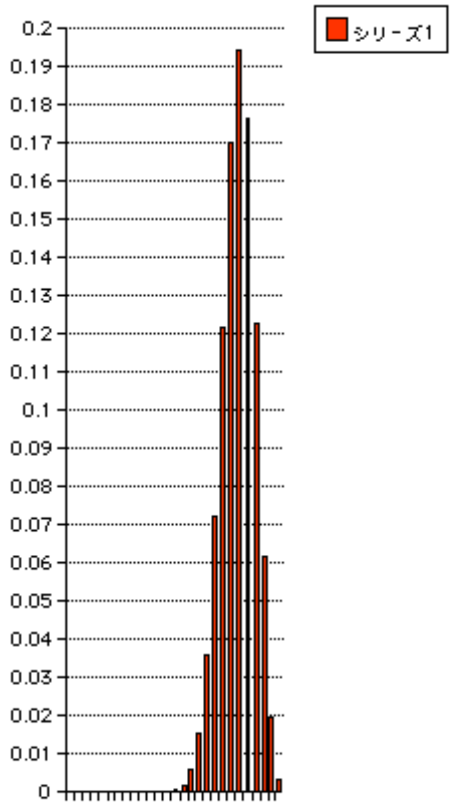


同じようにn=26に対して　p=0.2（左）と0.8(右を示します。



同 じようにn=26に対して　p=0.2（左）と0.8(右を示します。





さて二項分布を使う問題です。

(1) いまヒッチハイクをしようとして道路脇に人が立って車を待ちます。車がヒッチハイカーを拾う確率はどの車も一定で、0.01としましょう。さてこの人が １００台の車が前を通っても、まだ待っている確率はいくらか？

n=100,p=0.01,r=0を計算すると、P(r=0,p=0.01,n=100)=(1-0.01)^100=0.366=0.37

(2) あるゲームで敵の陣地に爆弾を持ち込んで2個以上爆発させると勝利するとしよう。持ち込むことのできる確率を0.01とすると、何発持ち込めば勝てるか？

ここで何発(n発）持ち込めば（打ち込めば）勝てるか？に対する模範的な答えは、確率いくらで勝てると答えることである。

よって、P(m)をm発持ち込んで爆発させる確率とすると、P(m)は二項分布に従うとして

この戦いに勝利するには、P(m=2), P(m=3),P(m=4),,,,を実現しなくてはいけない。

この無限級数和を取るのは大変なので、全確率は1であることを思い出すと、

$1 = P(m=0) + P(m=1) + P(m=2) + \cdots$ であり、m=2以上の和は、P(m=0)とP(m=1)が計算できれば１から引けばよい事が判る。

$$P(m=0) = P(r=0;n,p=0.01) = \frac{n!}{0!(n-0)!}[p]^0[1-p]^{n-0} = (1-p)^n$$

$$P(m=1)=P(r=1;n,p=0.01)=\frac{n!}{1!(n-1)!}[p]^1[1-p]^{n-1}=np(1-p)^{n-1}$$

よって勝利の確率は、$1-P(m=0)-P(m=1)=1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}$
が答えである、しかしこれではいまいち満足できないので、さらに仮定をする。
この確率が0.5よりおおきければ　本当に勝てると。
よって不等式 $1-(1-p)^n-np(1-p)^{n-1}>0.5$ の 解であるnを探せばよい。p=0.01より、$0.5>(0.99)^n+n0.01(0.99)^{n-1}=0.99^{n-1}(0.99+0.01n)$
方程式をきれいに解けない！しかし、電卓があるだろう！やみくもにnに値を入れて当たりをつけよう！
ちなみにn=100では、右辺は0.37*(0.99+1)=1.1>0.5であり不適切！

確率分布：ポアソン分布(Poisson)

二項分布は、n回試行するとき、r回成功する確率分布である。ここで各回の成功確率をpとしこれは一定であるとしましたが、ポアソン分 布はこのpが小さい: p<<1の場合でかつnが不明な場合に相当します。つまり、二項分布でnとpを外から入れてやると、実現回数rの関数として 分布P(r;n,p)が計算されましたが、ここでは、１個の値を外から入れてやれば良いのです。
この分布をする物理現象としては p<<1ですあからまれに起こる自然現象があります。例えば、一定時間内に雷のなる回数の分布、（実際雷の放電現象は、雲の 中でn回試行しているのでしょうが、実際雷（放電）に発達する確率は小さいとすれば、使えそうです）、小型の雷として、放射線計測装置の計数の分布（但 し、頻度が低い物）があります。

さて数学的には二項分布において、n->∞を取ります、このときnp=一定に保ったままです。ということは、二項分布ではnp=<r>=λ（iラムダ）で二項分布の期待値ですから、

$$np=\lambda,p=\frac{\lambda}{n}(n\to\infty)$$

の 極限を二項分布に対して取ります。二項分布の式は、

$$P(r;\frac{\lambda}{n},n)=\frac{n!}{r!(n-r)!}\left[\frac{\lambda}{n}\right]^r\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n-r}$$

で、n->∞で

$$\frac{n!}{(n-r)!}=n(n-1)(n-2)....(n-r+1)\to n^r\quad\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^{n-r}\to\left[1-\frac{\lambda}{n}\right]^n\to e^{-\lambda}$$

よっ て $$P(r;\frac{\lambda}{n},n)\to P(r;\lambda)=\frac{1}{r!}\left[\frac{\lambda}{n}\right]^r n^r e^{-\lambda}=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$ こ れがポアソン分布と呼ばれるものである。当然、外から入れるのはλのみである。

このλは期待値になっているはずだ。（あとで計算する）

全確率は、
$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r;\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}$$
$$= e^{-\lambda}(\frac{\lambda^0}{o!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots.) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^0 = 1$$

１である事が判り、確率である。ちなみに $(\frac{\lambda^0}{o!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots.)$ はマクローリン展開 $f(x) = f(0)\frac{x^0}{0!}+f'(0)\frac{x^1}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots..$ を 使って示すことができる。

$f(\lambda) = e^{\lambda}$ と置くと $e^{\lambda} = e^0\frac{\lambda^0}{0!}+e^0\frac{\lambda^1}{1!}+e^0\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots..$ = $(\frac{\lambda^0}{o!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots.)$ と なるのでよい。

離散分布のポアソン分布は、二項分布のある極限で定義した。$P(r;\lambda) = \frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$ 期 待値を計算する；
$$< r >= \sum_{r=0}^{\infty} rP(r;\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} r\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda^r}{(r-1)!}$$
$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$$
予想通り、<r>=& lamda;となった。同様の計算により、標準偏差の自乗を計算する、$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 P(r;\lambda) - < r >^2$ ちょっ

$$< r(r-1) > = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r;\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$$

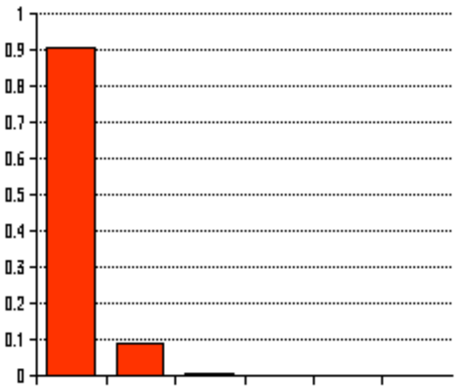
$$= \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r-2)!}e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\lambda^{r-2}}{(r-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

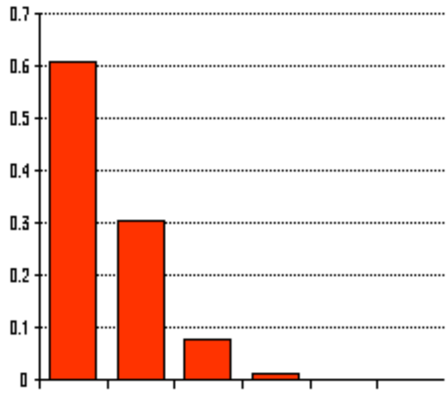
と別の方法でやってみる。

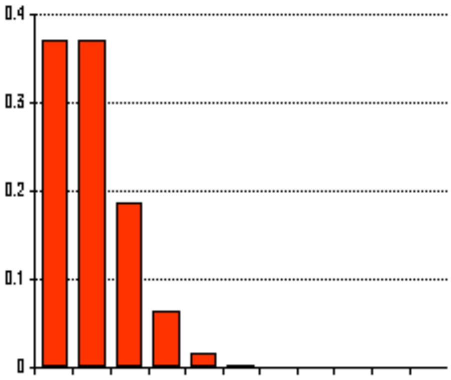
$< r(r-1) > = < r^2 > - < r > = < r^2 > - \lambda = \lambda^2$ より $\sigma^2 = < r^2 > - < r >^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ となる。

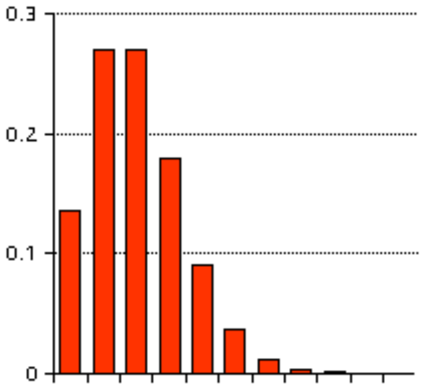
問題（１）：二項分布でpが小さい場合というわけで、前回の問題は、全く利用できる。
(1) いまヒッチハイクをしようとして道路脇に人が立って車を待ちます。車がヒッチハイカーを拾う確率はどの車も一定で、0.01としましょう。さてこの人が１００台の車が前を通っても、と言いたいところだが、nもpも不明であるのがポアソン分布なので、次の様に言い換える；npの積は期待値である。　：　(100x0.01=1)の意味づけをする。すなわち1分に平均1台車が通るとして、１００分後にまだ待っている確率はいくらか？

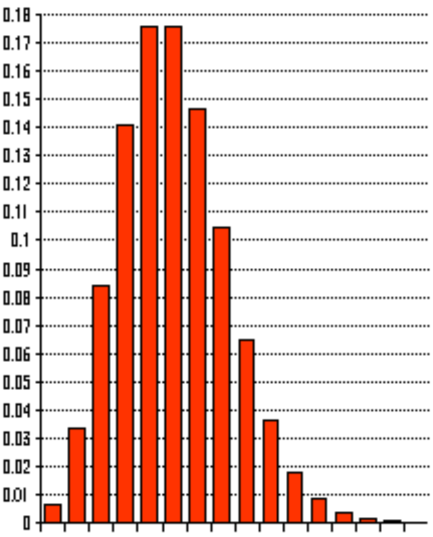
問題（２）：あるゲームで敵の陣地に爆弾を持ち込んで2個以上爆発させると勝利するとしよう。持ち込むことのできる確率を0.01とすると、何発持ち込めば勝てるか？
という二項分布の問題をどのように書き換えたらポアソン分布を使う問題になるか？またそれを解け！
ポアソン分布の例をグラフにしよう。
期待値　=0.1.0.5,1.0,2.0,5.0,10.0,20.0,50.

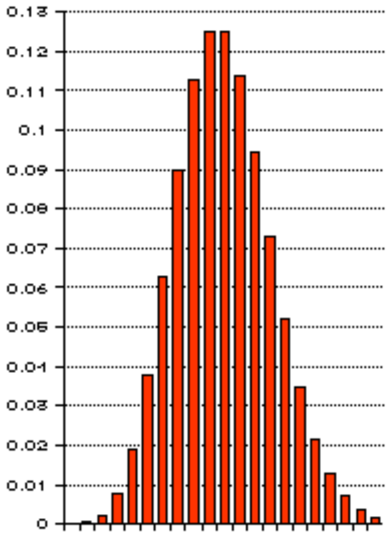


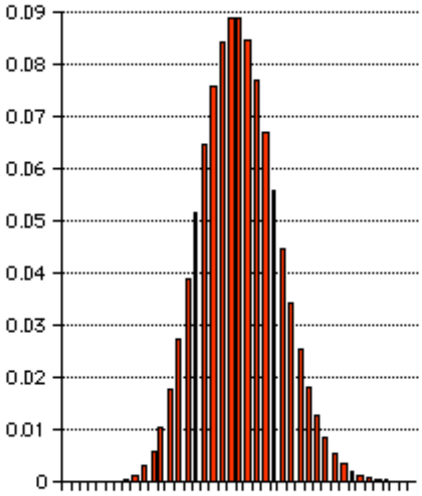


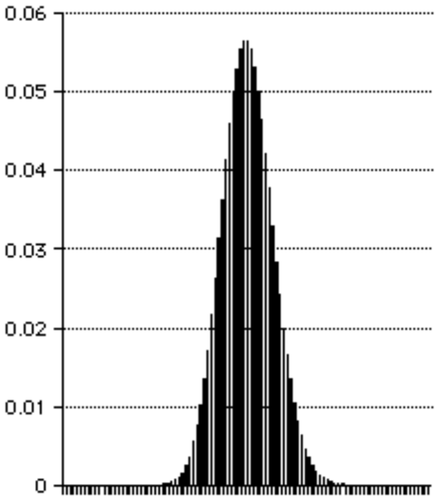












離散分布のポアソン分布は、 $P(r;\lambda) = \dfrac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda}$ とかかれる。

ポアソン分布と二項分布はある近似で一致する事の例題です:キーポイント確率・統計より
あなたのクラスのアインシュタインと同じ誕生日の人は何人ですか？
（注意：ここでクラスの人数はかかれていないので、適当に仮定して答えること、また「なんにん」いますかゥ？という問いには何人の確率はいくらと計算する こと。

二項分布の回答：試行回数nはクラスの人数に対応、５０名としよう。二項分布の確率p=誕生日は等確率と考えられるので、p= 1/365で行う。
ちなみに期待値　λ=np=50/365=0.137 人である。

$$P(r=0;p=1/365,n=50)$$
$$=\frac{50!}{0!\,50!}\left(\frac{1}{365}\right)^0\left(1-\frac{1}{365}\right)^{50}=\left(\frac{364}{365}\right)^{50}$$
$$=(0.99726)^{50}=0.8718$$

同 様にとなる、

$$P(r=1;p=1/365,n=50)=0.1198$$
$$P(r=2;p=1/365,n=50)=0.0081$$
$$P(r=3;p=1/365,n=50)=0.0004$$

一方これをポアソン分布と考えるなら、

$$\lambda=np=50*\frac{1}{365}=0.1370$$

と して、

$$P(r=1,\lambda=0.1370)=\frac{0.1370^1}{1!}e^{-0.1370}=0.1195$$

二 項分布では0.1198

$$P(r=2,\lambda=0.1370)=\frac{0.1370^2}{2!}e^{-0.1370}=0.0082$$

二項分布では0.0081

$$P(r=3,\lambda=0.1370)=\frac{0.1370^3}{3!}e^{-0.1370}=0.0004$$

二項分布では0.0004

と**良い近似で両者は近い**ことが判る。

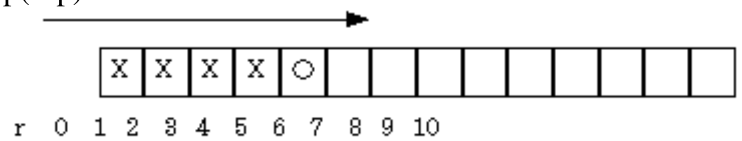
確率分布：幾何分布

$$P(r;p)=p(1-p)^{r-1}$$

とかかれる分布である。二項分布とはCombinationがな いところが違う。つまり、順序を意識している。試行を続けてゆき次に成功するまでr回試行するときの確率

である事は明らかだ。

たとえば、コインのHがでる確率をpとし、Tが出る確率は(1-p)であり、づうゝと続いてr-1回Tがでる髢□ｾから、その確率は (1-p)r-1である。これにr回目に確率pでHがでるので、全体の確率は p(1-p)r-1



この図では、１回目から4回連続Tが出ているので、(1-p)4そして５回目にHなので、確率pをかける。p(1-p)4。

確率かどうかは、まず全確率の計算：

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(r;p) = \sum_{r=1}^{\infty} p(1-p)^{r-1} = p + p(1-p) + p(1-p)^2 + \dots$$

$$= p(1 + (1-p) + (1-p)^2 + (1-p)^3 + \dots)$$

$$= p\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) = 1$$

$$<r> = \sum_{r=1}^{\infty} rp(1-p)^{r-1} = p\left(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \dots\right)$$

$$= p\left[\left\{1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots\right\} + (1-p)\left\{1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \dots\right\}\right]$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)} + (1-p) <r>$$

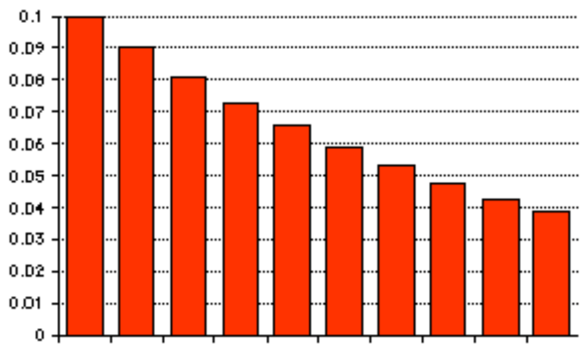
$$<r> = \frac{1}{p}, \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

p= 0.1の場合の確率を計算し表を作る。

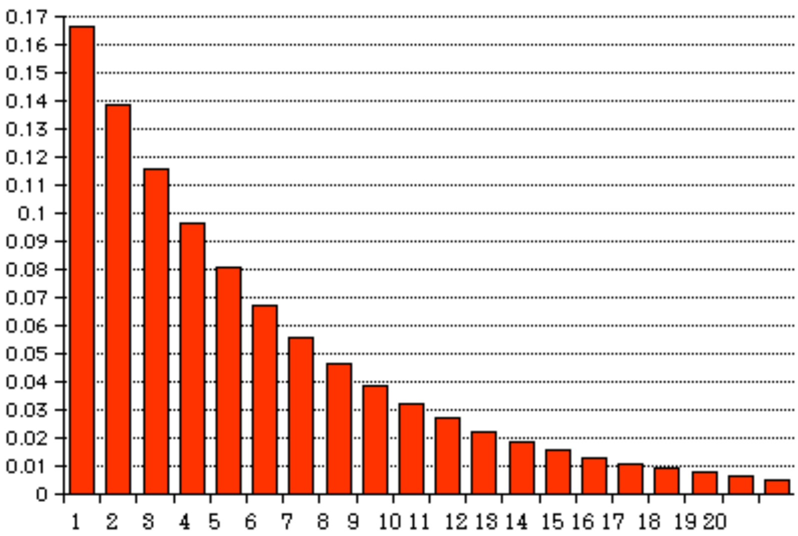
p= 0.1

r	
1	0.1
2	0.09
3	0.081
4	0.0729
5	0.06561
6	0.059049
7	0.0531441
8	0.04782969
9	0.043046721
10	0.0387420489

さらにグラフにすると、



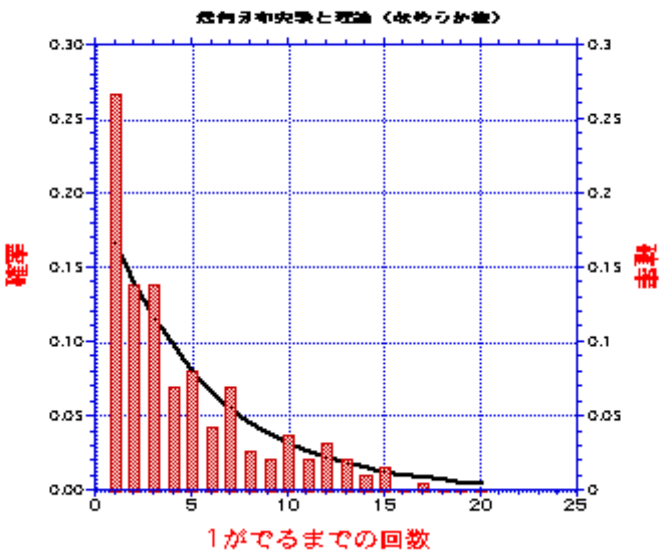
p= 1/6=0.16667の場合のグラフは次のようになる。



幾何分布の実験

例えば、サイコロを振って、初めて１が出る（２でも３でも良いが）までのサイコロを振る回数の分布を実験して調べよ。（私はサイコロの代わりに鉛筆を転がした、その結果を示す。ちなみに半分は我が家の小学生の転がしが入っている）

実線は上のグラフを重ねたもの。幾何分布の例を図に示す：p=1/6=0.16667のサイコロの場合で

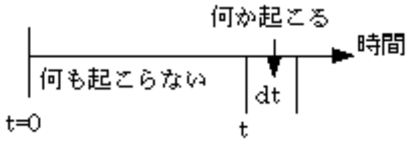


ある。

確率分布：指数分布(exponential distribution)

全く偶然に支配される現象がその根底にあるとき、（例えば放射性元素の崩壊事象や、窓口への客の到着時刻）事が起こらない時間間隔0〜 tが存在し、次のある短い時間dtで事が起こる様

な現象の確率を考える、これは幾何分布の連続版とも言える物で、幾何分布の説明に使った箱のおもちゃを連 続量として扱うと、時刻 t ＝０から t まで何も起こらず、t〜t+dtで何かが起こる（例えば放射性元素の崩壊事象、あるいは客の窓口への到着）、
この事件全体の確率をP(t)とかこう。



ここで、各箱に対応する短い時間間隔dtのなかで
何かが起こる確率は偶然に支配されているので、
一定であるとできる。時刻0からtまでのt分間に
事件（放射性元素の崩壊や客の到来）が起きる数は、ポアソン分布に従うとしてよいので、単位時間あたり平均の事件の起こる数を l とすると、時間tの間の平均の事件数はlt となる。ここでは、時刻t=0からtまで何もおこらないので、その確率は,

$P_{poisson}(r=0,\lambda t)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$ と かかれる。時刻0からtまでに１個以上の事件の起こる確率は$1-e^{-\lambda t}$で あり、$1-e^{-\lambda t}=\int_0^t \lambda e^{-\lambda u}du$ と いう関係式があるので、連続分布の確率は、確率密度関数から積分して導かれることを思い出すと、この式は、時刻0からtまでに

１個以上の事件の起こる確率 密度関数　P^(u)が$\lambda e^{-\lambda u}$ であることを示している。ただし、u>0の条件付き であるし、また確率密度関数 P^(u)=0, u<0である。　　この分布は確率密度関数がexponetial（指数型）なので指数分布と呼ばれる。まとめると、確率密度関数

$\widehat{P}(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ は 時刻t〜t+dtの間にで何かが起こる確率密度であり、その積分である

$1-e^{-\lambda t}=1-F(t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda u}du, F(t)=e^{-\lambda t}$ は 時刻t=0〜tまでの間に何かが起こる確率である。
よって(1-F(t))でかかれた F(t)は時刻t=0〜tの間なにも起こらず、t〜t+dtの間に何かが起こる確率の積となっている。

$F(t)=e^{-\lambda t}$ こ れが指数分布である。

問題：　ある電気製品の故障するまでの時間の期待値は２年であるという．この製品が多数販売されているとき，１ 年以内に故障する製品の割合はいくらか.
時刻t = 0の時点で正常なy0個の製品があって，時間の経過にしたがって，それぞれが独立に一定の確率で故障するとする（放射性同位元素と同じだ）。さて，ある時 刻tで正常な製品の数をy(t)個として、時刻t からt +dtの間の微少時間dtの間に故障する製品の数(dy)の「y(t)に対する割合」は，独立に一定の確率で故障するので，t によらず一定である．したがって，その割合をλ

であらわすと，次の微分方程式が成り立つ。 $dy(t) = -\lambda y(t)dt$ これを解くと、

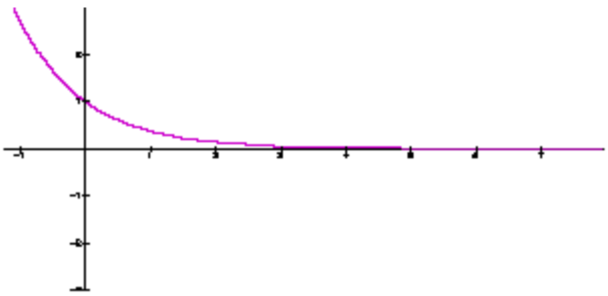
$$\frac{dy}{y} = -\lambda dt, \ln(y) = -\lambda t + C, y = y_0 e^{-\lambda t}$$

この微分方程式の解は，初期値y0のときy(t) = y0e-λtとなります．ここで，(y0 - y(t)) / y0という量は「時刻 0からtの間に故障した製品の数の，最初にあった製品の数に対する割合」を示しています．それぞれの製品は独立に故障しますから，この量は「１つの製品

が時刻 0からtの間に故障する確率」と考えることができます．そこで，確率変数Xを「１つの製品が故障するまでの時間（すなわち寿命）」とすると，(y0 - y) / y0は「１つの製品が故障するまでの時間がt以下である確率」すなわちP(X<=t)と同じです．つまり

$$P(X \le t) = \frac{y_0 - y}{y_0} = 1 - e^{-\lambda t}$$

これをtで微分すると確率密度関数f(t)が次のように得られます． $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ただし，これはt>=0のときだけで，t < 0のときはf(t)= 0とします．この確率分布を指数分布といい，これまでの導出過程でわかるように，指数分布は前回説明した幾何分布に対応する，連続的待ち時間分布になります．図は指数分布の確率密度関数のグラフです．「小さい値ほど出やすい」ことがわかります． 図．指数分布の確率密度関数



指数分布（確率密度関数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ がこのようにかかれる時）の全確率、期待値と分散s2を計算しよう。連続分布の期待値や分散は確率密度関数の積分で表されるので、全確率は

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{-\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = -[0-1] = 1$$

期待値は

$$< x >= \int x f(x)\,dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$$

$$= [0-0] + \frac{1}{-\lambda}\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{-\lambda}[0-1] = \frac{1}{\lambda}$$

分散は

$$\sigma^2 = \int_0^\infty \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

となる。

さて窓口や放射性元素のようにどのタイミングで窓口の客が来るか、あるいは崩壊するかはランダムであるという。つまり、どのタイミングかは判らないことを ランダムという。これを電卓の乱数(RND)を使って遊んでみよう。rndキーを押すと０から１の間の乱数（ランダムなネ数値）が表示される、何度かやっ てみると、毎回違うようだ。

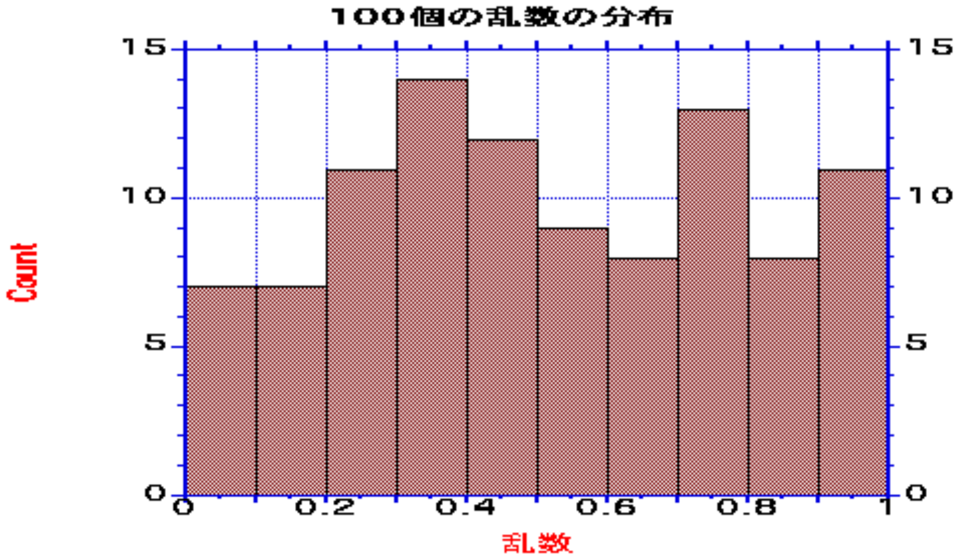
（1）ランダムかどうか調べよ。ヒント：ランダムということは、微少区間では確率は一定である。

（2）複数の乱数を大小順に並べてそれらの差の絶対値はどういう分布をするか、試せ！これが窓口で待つ銀行員（ある驍｢は放射性同位元素の崩壊現象の寿命 を測定する実験）の待ち時間分布であることは、判ってもらえるかな？

窓口や放射性元素のようにどのタイミングで窓口の客が来るか、あるいは崩壊するかはランダムであるという。どのタイミングかは判らない ことをランダムという。これを電卓の乱数(random number)を使って遊んでみよう。RAN#キーを押すと０から１の間の乱数 （実数のランダムな数値）が表示される、何度かやってみると、毎回違うようだ。

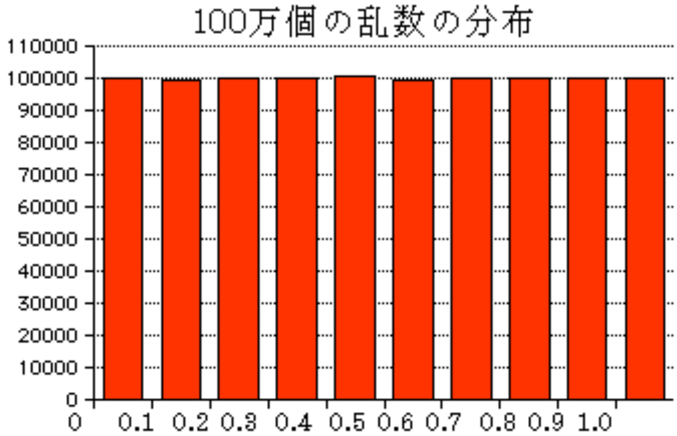
（1）ランダムかどうか調べよ。ヒント：ランダムということは、微少区間では確率は一定であ　ランダムか？

乱数１００個を並べる： 0.513886 0.175747 0.308661 0.534550 0.947657 0.171742 0.702253 0.226438 0.494789 0.124724 0.083901 0.389659 0.277234 0.368082 0.98
3467 0.535414 0.765705 0.646493 0.767162 0.780261 0.822977 0.151937 0.625496 0.314694 0.346912 0.917232 0.519776 0.401166 0.606777 0.785426 0.931551 0.869948 0.866551 0.674541 0.758423 0.581911 0.389260 0.355646 0.200238 0.826952 0.415916 0.463536 0.979193 0.126440 0.212643 0.958481 0.737485 0.409069 0.780137 0.757922 0.956871 0.028097 0.318737 0.756957 0.243002 0.589560 0.043426 0.956054 0.319143 0.059362 0.441890 0.915048 0.572265 0.118842 0.569788 0.252056 0.495873 0.236741 0.476975 0.406106 0.873024 0.426976 0.358229 0.381999 0.043181 0.160592 0.522367 0.696602 0.097103 0.400859 0.773455 0.244834 0.342835 0.230001 0.297886 0.304555 0.887234 0.036671 0.651167 0.398619 0.676318 0.732601 0.937825 0.233287 0.838507 0.967239 0.778662 0.431531 0.674123 0.809383



る。これを一様分布という。乱数１００個を並べると上の図のようにまだバラバラしている、乱数の数がたらないようだ。

そこで乱数１００万個で実行：っとこのくらい平ら（ランダム）になりました。

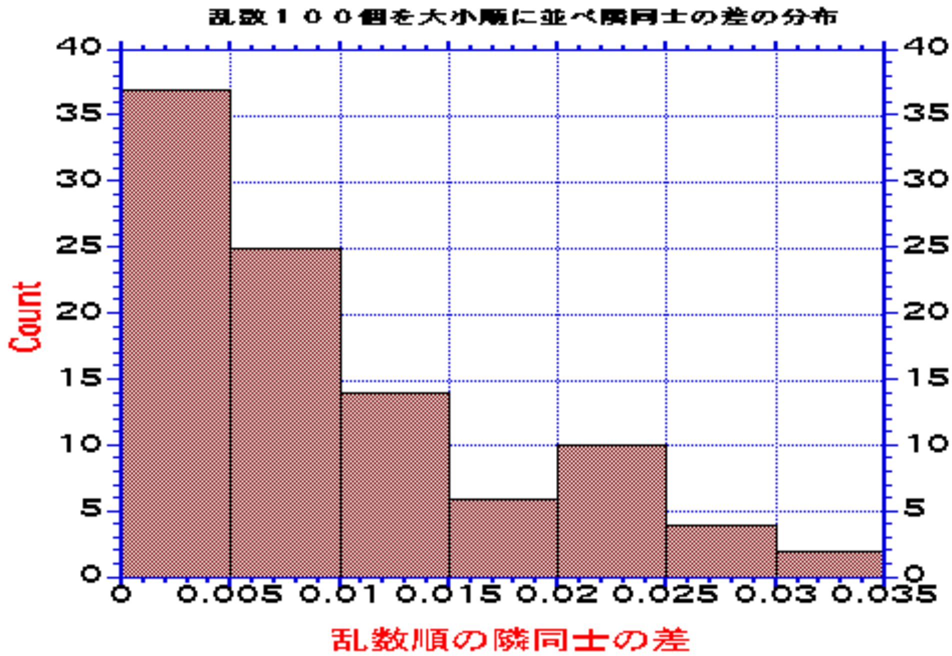


ここで縦軸のサイズが大きくなった事が判りますね。そして相対的に変動が小さくなった事も判るでしょう。
とても人手でできる範囲を超えています。当然ですが、computerを使いました。どうやってやったかは、私の別の授業（計算物理：対象２年生）を試し てください。

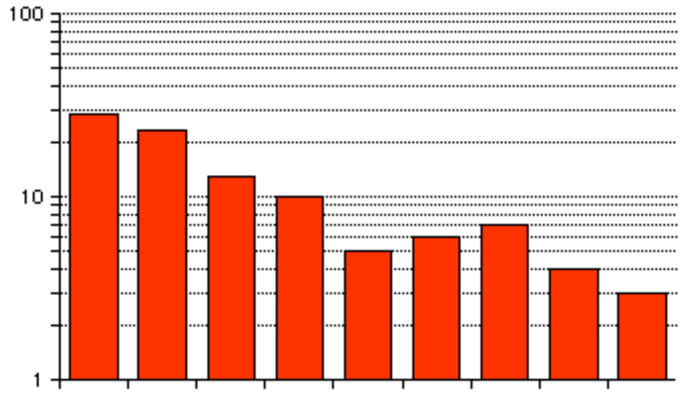
（２）次に二つの乱数の間の差の絶対値はどういう分布をするか、試せ！これが窓口で待つ銀行員（あるいは放射性同位元素の崩壊現象の寿命を測定する実験、 あるいはあなたのバス停への到着がランダムとしたバス）の待ち時間分布であることは、判ってもらえるかな？体験と違いますか？実は、銀行の窓口に現れる人 のタイミングを乱数を振ることによりシミュレーションをしましたが、銀行の窓口の人の待ち時間は、すべての人のタイミングを決めた後、
つまり、適当な個数の乱数を振って（これにより、人が窓口に到着するタイミングを決め

る）、これを時刻とみなし順番に並べ（例えば大きい順に）、そのそれ ぞれのとなりあう二つのタイミングの差の分布をといるべきでした。
そこで、上で述べたことをやってみます。100個の乱数を作り、大きい順に並べ替えます。そして隣り合う値の差を抜き出し、その分布をヒストグラムにしま す。

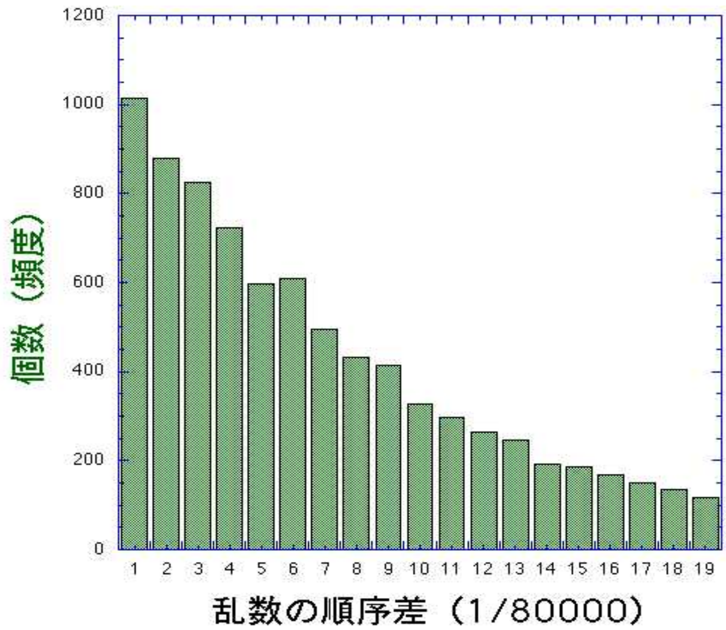
0.028097 0.036671 0.043181 0.043426 0.059362 0.083901 0.097103 0.118842 0.124724
0.126440 0.151937 0.160592 0.171742 0.175747 0.200238 0.212643 0.226438 0.230001 0.233287
0.236741 0.243002 0.244834 0.252056 0.277234 0.297886 0.304555 0.308661 0.314694 0.318737
0.319143 0.342835 0.346912 0.355646 0.358229 0.368082 0.381999 0.389260 0.389659 0.398619
0.400859 0.401166 0.406106 0.409069 0.415916 0.426976 0.431531 0.441890 0.463536 0.476975
0.494789 0.495873 0.513886 0.519776 0.522367 0.534550 0.535414 0.569788 0.572265 0.581911
0.589560 0.606777 0.625496 0.646493 0.651167 0.674123 0.674541 0.676318 0.696602 0.702253
0.732601 0.737485 0.756957 0.757922 0.758423 0.765705 0.767162 0.773455 0.778662 0.780137
0.7802610.785426 0.809383 0.822977 0.826952 0.838507 0.866551 0.869948 0.873024 0.887234
0.915048 0.917232 0.931551 0.937825 0.947657 0.956054 0.956871 0.958481 0.96723

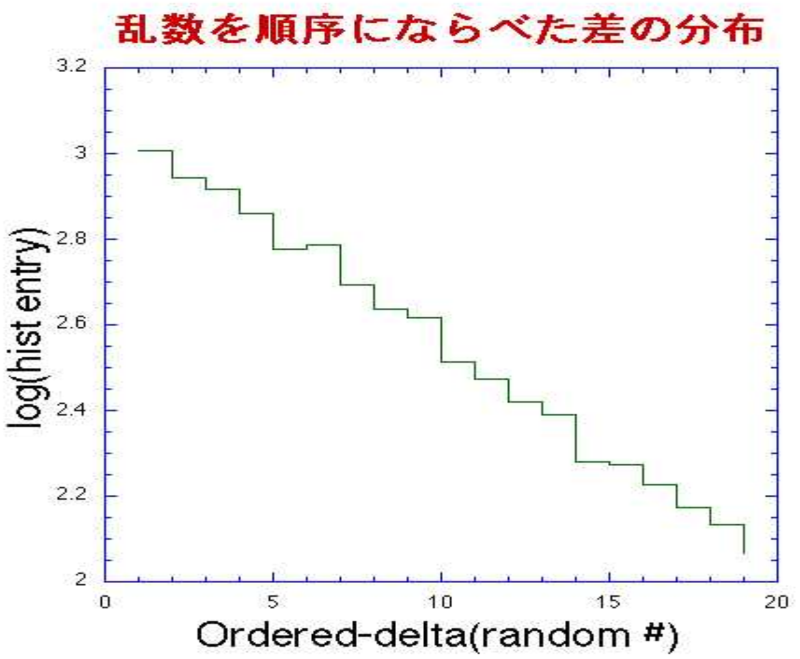


右下がりの分布ですが、なに分布なのかは判断つきません。縦軸をlogで再plotしてみる。１００個では不足のようだがまだ、先ほどのグラフよりまし。



では大数の法則に従えば理想的な指数関数分布に近づくのか試してみよう。１万個の乱数を発生させて（もちろん計算機で）それを大小順に 並べおのおのおのの差を取り、その差のヒストグラムを上記の１００個の場合のように取ってみた。次の図である。始めは縦軸が通常の個数（頻度）である。横軸は 差の広がりを２０個のビンに分けた。次の図は縦軸のlogを取った。指数関数なら直線に見えるだろう。

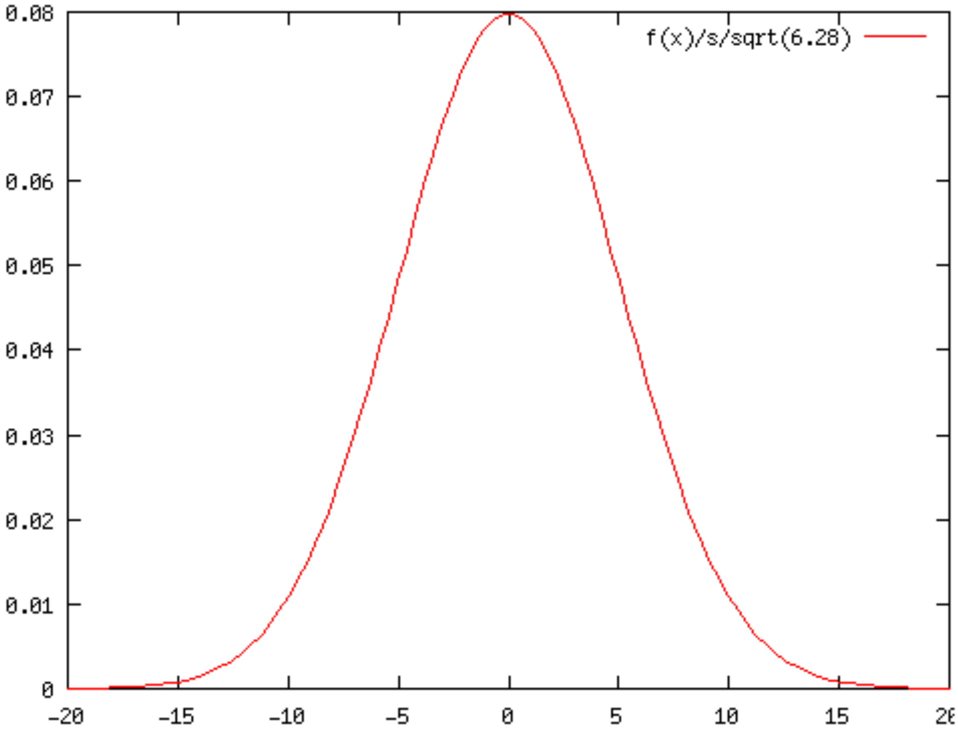




確率分布：ガウス分布
連続分布：ガウス分布（正規分布とよばれることもある）
これは二項分布やポアソン分布の離散分布を連続化したものである。
（幾何分布を連続化して指数分布を得た）

$$\hat{P}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

とかかれる確率密度関数である。パラメーターは２つ、μとσであ る。また変数xは連続変化する量である。下のグラフはガウス関数です。高さの値はm=0,s=5の時の計算値です。



連 続分布：ガウス分布（正規分布とよばれることもある） $$\hat{P}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ が確率密度関数であることを示そう。(1)全確率は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{P}(x;\mu,\sigma)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi\sigma^2}=1$$

ここで公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を 使った。

同様に　xの期待値<x>は

$$< x >= \int_{-\infty}^{\infty} x\hat{P}(x;\mu,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= 0 + \mu * 1$$

より、$< x >= \mu$, となる。ここで$\int_0^{\infty} xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$となる。また分散$\sigma^2$ は

$$<(x-\mu)^2>= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \sigma\sqrt{2\pi} = \sigma^2$$

で あることが解る、だからずううと分散にシグマの二乗を使ってきた。ただし$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$であることを使った。

連続分布：ガウス分布は確率密度関数であるから、実際に役立つ確率にするには積分する必要がある。$\hat{P}(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ が 確率密度関数である。このため、積分を計算することはでき無くないが、便利のために積分表が作られている。しかし、　期待値と分散についてその都度表を作 ることは無駄なので、変数変換を行い統一化した表が用いられる。そこでの変数はz一つである。$\frac{x-\mu}{\sigma} \equiv z, \hat{P}(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ 積 分には２種類が一般に用意されている。x=mの周りに対称に積分した表(two tailed)と、-∞からx=bまで積分した表(one tailed)である。表参照

$\int_{-n\sigma}^{+n\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 68.27\%, 95.45\%, 99.73\% (n=1,2,3)$ この意味は、n=1なら分布がガウス分布に従うとして、平均が m,分散がs2が判っていて測定値のXがm-1sからm+1sの間に来る確率は68.27％である事を意味する。

表から自分で次の事を確かめてください。$\int_{-n\sigma}^{+n\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.90, 0.95, 0.99, 0.999 (n=1.654, 1.960, 2.576, 3.298)$ 同様にn=1.645のときは、分布がガウス分布に従うとして、 平均がm,分散がsが判っていて測定値のXがm+1sより小さい確率は90％である事を意味する。

-∞からx=bまで積分した表(one tailed)である表は、実際はtwo-tailedの表から計算可能である。

ポアソン分布の
グラフを描いて判ったと思うが、ポアソン分布で期待値lが大きいときはグラフはガウス分布に近づく。ポアソン分布のグラフで期待値lが小さいときは左の片 のおちかたは急で左右非対称であるが、期待値lが大きくなると左右対称に近づく。
数学的にポアソン分布の式をStarlingの公式を用いてガウス関数に持って行く事ができる。ここではそれは行わない。各自調べておいてほしい。

問題：期待値5.7のポアソン分布に従う分布があるとしよう。
(1) ２以下事が起こる確率を計算せよ。
(2)これをガウス分布すると強引に考えるとき、その確率を求めよ。ただし、ガウス分布ではxは実数であるので、2回以下とは、x<2.5 のことである。

$$P(r \le 2) = \sum_{r=0}^{2} P_{Poisson}(r, \lambda = 5.7)$$
$$= \frac{5.7^0}{0!}e^{-5.7} + \frac{5.7^1}{1!}e^{-5.7} + \frac{5.7^2}{2!}e^{-5.7}$$
$$= (1 + 5.7 + 16.245)3.346 * 10^{-3}$$
$$= 7.68 * 10^{-2}$$

$$P(r \le 2) = \int_{-\infty}^{2.5} \hat{P}_{Gauss}(x, \mu = 5.7, \sigma = \sqrt{5.7})dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1.34} \hat{P}^{N}_{Gauss}(x, \mu = 1, \sigma = 1)dx = 0.0901$$

充分大きな期待値ではないが、7.5%(ポアソン分布）と9%（ガウス分布）は近い！ポアソン分布とガウス分布は親戚だ。

2者択一の４０問中６０％正解すると合格する試験がある、これにサルが挑む。サルが合格する確率を二項分布の場合、とガウス分布の場合 で計算せよ。
ここでサルとは2者択一でランダムに応える回答者を代表している。

二項分布： $P_{binomial}(r \ge 24, p = 0.5, n = 40) = \sum_{r=24}^{40} \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$ =0.134 である。
一方ガウス分布を仮定すると、

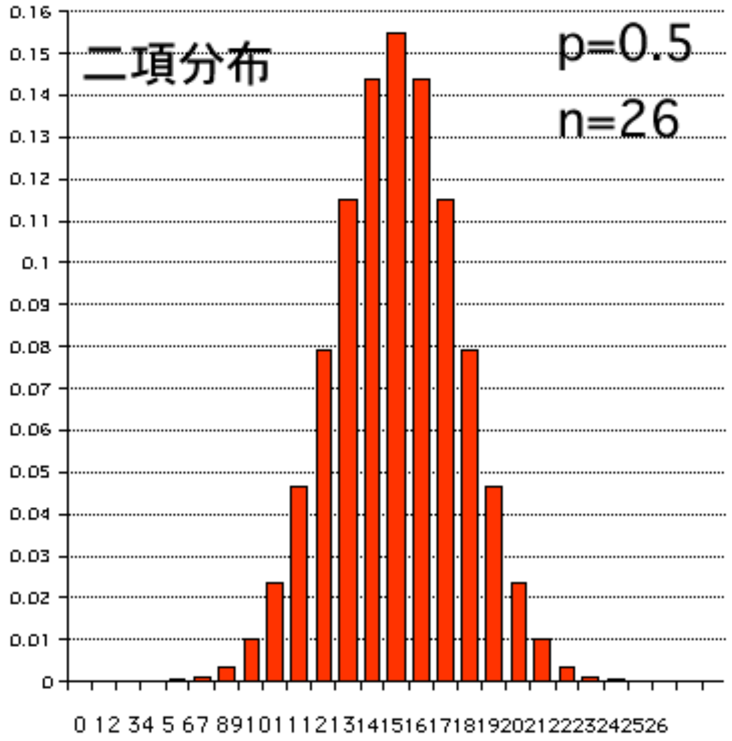
$$P(r \ge 24) = \int_{23.5}^{\infty} \hat{P}_{Gauss}(x, \mu = 20, \sigma = \sqrt{10})dx$$

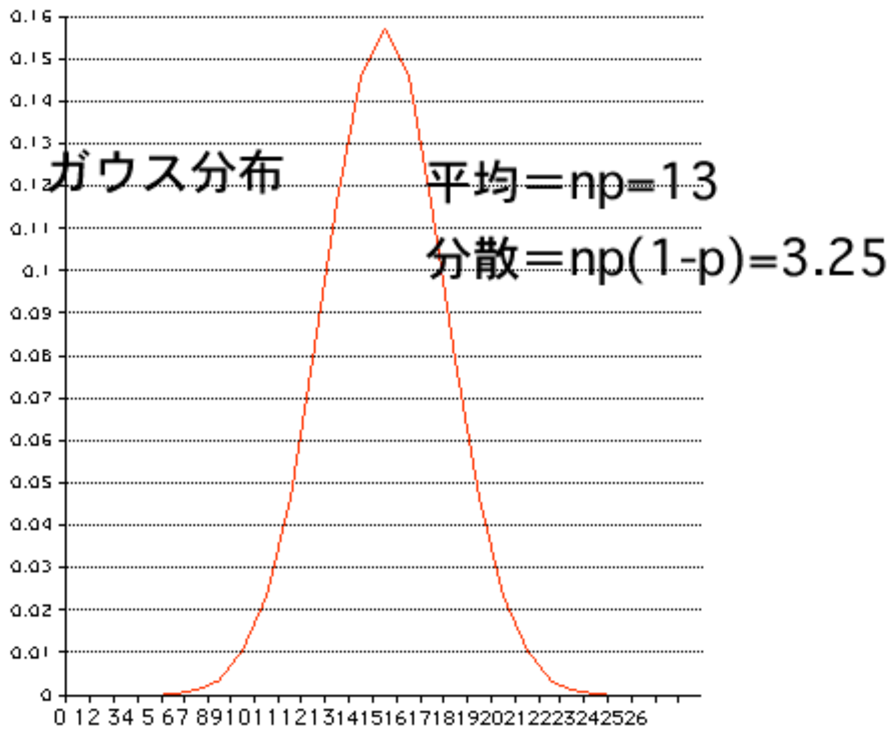
$$= \int_{1.11}^{\infty} \hat{P}^{N}_{Gauss}(x, \mu = 1, \sigma = 1)dx = 0.1357$$

と なる。つまり、両者は近

い。二項分布とガウス分布も親戚だ。

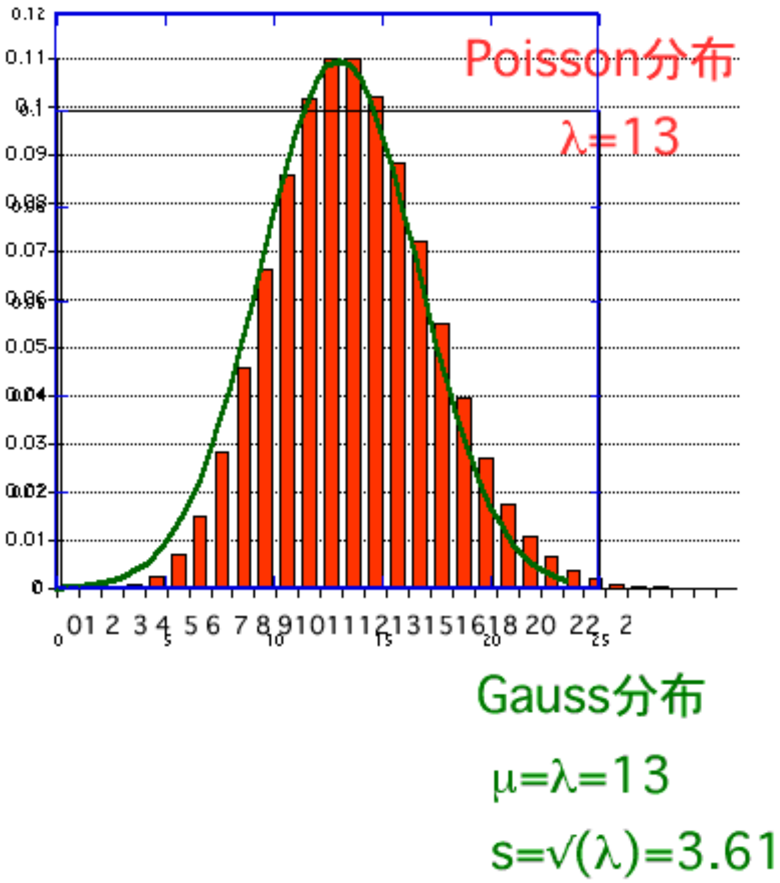
これをヒストグラムで示してみよう。二項分布とガウス分布を比較する、平均値あるいは期待値を１３とする様に二項分布では　n=26, p=0.5　を選んだ。またガウス分布で は　平均＝13、分散＝n*p*(1-p)=3.25を選んでプロットした。





同様にポアソン分布とガウス分布を比較する、平均値あるいは期待値を１３とする様に ポアソ

ン分布では　北市=13　を選んだ。またガウス分布で は　平均＝13、分散＝sqrt(期待値）=3.6を



選んでプロットした。

ポアソン分布は本来横軸が無限大までつづく分布なので、右へ長い尾を引く。これが左右完全に対象なガウス分布とは少々異なる形であることが見て取れる。

おまけ：ポアソン分布から数学的にガウス分布を導出する。

ガウス分布の形を他の分布から導く

ガウス分布はどこで御利益があるか？

（１）物理で扱うデータの精度をあらわす量：次節　　中心極限定理

他の物理問題：（２）　ガウス分布関数 $\hat{P}_G(x,\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ で

$$\hat{P}_G(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\sigma^2=2Dt,\mu=0$$

$$then\hat{P}(x;0,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x)^2}{4Dt}}.$$

$$This\hat{P}satisfies\frac{\partial\hat{P}}{\partial t}=D\frac{\partial^2\hat{P}}{\partial x^2}$$

$$\vec{V}=(v_x,v_y,v_z)f(v_i)=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$$

この方程式は拡散方程式である。

（３）温度Tの気体分子の速度 $\vec{V}=(v_x,v_y,v_z)$ は次の分布（マックスウェル分布）に従うことが知られている。各成分はマックスウェル分布に従う。

$f(v_i)=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}e^{-\frac{mv_i^2}{2k_BT}}$ これは期待値 $\mu=0$ 、　分散 $\sigma=\frac{k_BT}{m}$ のガウス分布である。

二項分布をガウス分布で近似することができる。

二項分布 $P_B(r,n,p)=\frac{n!}{(n-r)!r!}p^r(1-p)^{n-r}$ でnを大きく、かつ p=0.5付近に持ってくると左右対称の分布となる、またnは大きいので本来離散型の分布が連続的にみえてくる。これはガウス分布であろう。証明はちょっと難しい。

ポアソン分布とガウス分布を比べてみる。

ポアソン分布 $P_p(r,\lambda)=\frac{\lambda^r}{r!}e^{-\lambda}$ 両辺の対数をとって

$$\log P_p$$
$$= -\lambda + r\log\lambda - \log r!$$
$$\approx -\lambda + r\log\lambda - (r\log r - r + \log\sqrt{2\pi r})$$
$$= r - \lambda + r(\log\lambda - \log r) - \log\sqrt{2\pi r}$$

ここでは　Starlingの式を用いて近似した。

Starlingの式は $\log r! = r\log r - r + \log\sqrt{2\pi r}$ とかかれる。さらに $r = \lambda + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x$ として、λ,rは大きな量とし、相対的にx,λ' は同程度の大きさで相対的にλ,rに比べて小さな量である。従って、$r = \lambda(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)$ という式で $\frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x$ は1に比べて小さな量である。近似をするわけだ。

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x - \lambda(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)(\log(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)) - \log\sqrt{2\pi\lambda(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)}$$

となる。

$$\log\sqrt{\lambda(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)} = \frac{1}{2}\log(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x) + \frac{1}{2}\log\lambda \approx \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{\lambda\lambda'}}(1 - \frac{x}{2\lambda\lambda'}) + \frac{1}{2}\log\lambda$$

logのTayler展開式の２次までとる式をつかうと、

$$\approx \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x - \lambda(1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda\lambda'}}x)\frac{x}{\sqrt{\lambda\lambda'}}(1 - \frac{x}{2\lambda\lambda'}) - \log\sqrt{2\pi\lambda} - \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{\lambda\lambda'}}(1 - \frac{x}{2\lambda\lambda'})$$

これを $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ の2次の近似までとると、

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x - \frac{x^2}{\lambda'} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda'} - \log\sqrt{2\pi\lambda} - \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{\lambda\lambda'}}$$

最終式は

$$\log P_P = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda'} - \log\sqrt{2\pi\lambda}$$

となる。ここで $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ を小さいとして無視した。さらにPpという離散型ポアソン分布から連続型のガウス分布へ移行しようというのだから、積分系で書くことが確率となる。

$$P_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda'}}$$

が確率密度で $dr = d(\lambda + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}dx$ より、

$$P_p dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda'}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda'}}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda'}}dx$$

となり、最終的に大きなλに依存しない形となる、ここでガウス分布の広がりを表す分散はλ'である。ちなみに期待値（平均値）はゼロの場合である、なにしろ大きなｒ、λでポアソン分布はガウス分布に近いことを示したのであるから。

物理実験学　　(5)

竹下徹　(04June2002)

精度の伝搬（誤差の伝搬ともいう人もいる）：

種々の測定値があるとき、**どうやってまとめるか**考えよう。

精度の評価が異なる２つの実験結果をどうやって組み合わせるべきか？

例：２つの電圧計があって、同じ電圧を測ったとしよう。
電圧計Aの最小メモリは1Ｖ,電圧計Bの最小メモリは0.1Ｖ,
電圧計Aの読みVAと電圧計Bの読みVBの両方を知ってあなたはどういう結論をくだすか？
アイデfア１　電圧計Aの精度は悪いので、そのデータを無視する。
アイデア2　電圧計Aの読みと電圧計Bの読みの平均値を取る。
アイデア３：アイデア１とアイデア２を含むやり方、重みを定義する。
　　WAとWBとしよう、２つの電圧計で測った２つの測定の総合結果として、
　　V=(WA*VA+WB*VB)/(WA+WB) として電圧を得る。
アイデア１はWA=0.0,WB=1.0に相当する、アイデア２はWA=0.5,WB=0.5ということ。
どうやって　WA,WBを決めるべきか？

この場合電圧計の違いは最小メモリだけであるので、これを測定精度と考え、
WA=WB/10とすべきであろう、

これの拡張として　一般に　　測定精度　を標準偏差　σ と取り、重み $\frac{1}{\sigma^2}$ をとることが行われる、

すなわち、精度の良い実験では　σ は小さい、よって重み $\frac{1}{\sigma^2}$ は大きい、また

　　　　精度の悪い実験では　σ は大きい、よって重み $\frac{1}{\sigma^2}$ は小さい、という合理的な重みを与える（なぜ２乗なのかは後で考える）。よって 各種の異なる精度を持つ値　xiの平均値

<x>は $<x>=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\dfrac{x_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{N}\dfrac{1}{\sigma^2}}$ で 計算し、その精度を表す標準偏差 $f=ax+by+c$
とかかれる。証明はあとで。

例を示そう：もしも測定データxiの組が関数f(x)に従うならさらに、$f(x)=ax+b$ と いう一次関数のとき：
つまりxiがばらばらとばらつくときf(x)はどのような振る舞いをするのか？

ばらつきは、標準偏差あるいは分散で表される：fの標準偏差を σ_f ,x の標準偏差を σ_x として

$$\sigma_f^2=<f^2>-<f>^2$$
$$=<(ax+b)^2>-<ax+b>^2$$
$$=<a^2x^2+2abx+b^2>-(a<x>+b)^2$$
$$=a^2<x^2>+2ab<x>+b^2-a^2<x>^2-2ab<x>-b^2$$
$$=a^2<x^2>-a^2<x>^2$$
$$=a^2(<x^2>-<x>^2)$$
$$=a^2\sigma_x^2$$

つまり $\sigma_f^2=a^2\sigma_x^2, \sigma_f=|a|\sigma_x$

:そりゃa倍したので、広がりもa倍になる！bは広がりに関与しない。では一 般の関数のときはどうするか？次のテーラー(Talyor)展開の式を使う。

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=x_0}+\ldots$$

この式は $x\approx x_0, (x-x_0)\approx 0$ の近似の成り立つ領域で成立する。ここで、測定値xと書いたが、これがx0付 近であるということは、x0=<x>で有ることを意味している。中心極限定理によりxはガウス分布をしその分散（＝標準偏差＾２＝標準偏差の ２乗）が<x^2>-<x>^2であることも解っている。
その極意は、どんな関数でもxのべき乗　x^n（xの n乗）で書くことができるという点にある。
例題：次の関数をTalyor展開せよ。

$$(1)f(x)=e^x,(2)f(x)=\ln(x),(3)f(x)=\sin(x),(4)f(x)=\cos(x)$$

よって、$(x-x_0)^2$ などはとても小さい、よって無視する！！そうす ると、

$f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)\left[\dfrac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ と一次式に持ち込める。すなわち

$f(x)=\left\{f(x_0)-x_0\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right\}+\left\{\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right\}x$

$f(x)=ax+b, a=\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}, b=f(x_0)-x_0\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ よって

$\sigma_f^2=|a|^2\sigma_x^2=\left(\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right)^2\sigma_x^2$ という式を得る。これがより一般化された精度を計算する式である。

さらに一般化を進める。つまり、f(x)はいつも変数xだけの関数とは限らないということだ。が始めからそれをするのは大変なので、２変数つまり $f=f(x,y)$ つま り、測定した変数は２個xとｙがある時を考える。このとき測定量は(xi,yi)の組として測定されている、例えば、糸と重りで振り子を作る。振り子の振 動の長さを求めるには、糸の長さ(=x)と重りの重心までの距離（おおかた重りの半径）(=y)を測定することになる。さてこの振り子の振動の長さ($\ell=x+y$) で計算されるはずだ。このxとyの測定はそれぞれ行われそれぞれの平均値<x>,<y>と分散（あるいは標準偏差）が判っている 時、振り子長さの値とその精度はどうやって計算すべきかという問題である。ここでも最も簡単な仮定から始める。すなわち $f=ax+by+c$ とかかれるときの分散の計算となる。もちろんx,yが変動する可能性があり、 その結果がfにどのように伝わるかを計算する事になる。fのばらつきは、標準偏差あるいは分散で表される：fの標準偏差の二乗（分散）を σ_f^2 ,xの標準偏差の二乗（分散）を σ_x^2、y の標準偏差の二乗（分散）を σ_y^2 としよう。

$$
\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= \langle f^2\rangle-\langle f\rangle^2=\langle (ax+by+c)^2\rangle-\langle ax+by+c\rangle^2\\
&= a^2(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2)+b^2(\langle y^2\rangle-\langle y\rangle^2)+2ab\{\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle\}\\
&= a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2+2ab\,\mathrm{cov}(x,y)\\
&= a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2
\end{aligned}
$$

xとyは独立しているので、cov(x,y)=0であるので、独立２変数に 拡張した精度の伝搬式が得られた。これによるとf=ax+by+cのときfの精度を決めるのはaとbであり、2乗和で効いてくる。2乗和ではfの精度(σ_f^2) は $\sigma_f^2>\sigma_x^2$、σ_y^2 である(a,b>1のとき）。つまりfの相対精度（ $\frac{\sigma_f}{f}$ ）は必ずxの相対精度($\frac{\sigma_x}{x}$)より、yの相対精度($\frac{\sigma_y}{y}$)より悪くなる（大きくなる）ことが示めされる。各自計算せよ。

さらに一般化する、すなわち複数変数の関数f(x,y)時へ拡張する。つまり、測定結果fを得るため

に、x,やy等を測定しなければならず、x, yは測定結果であるので、精度を持つ。またTalyor展開を使いたいが、多変数のTalyor展開はどうするかが問題である。一変数のTalyor展開 を次のよう書いた。$x \approx x_0, (x - x_0) \approx 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \ldots$$

これを独立な２変数へ拡張して次のように書く、

$$f(x) = f(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{(y - y_0)}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{(y - y_0)^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \ldots$$

独立な2変数のtaylor展開式の中の $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ や $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ はなにか。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]$$

である、これが定義であるが、実際が重要なので、例題をあげる

$f(x, y) = ax + by + c, \dfrac{\partial f}{\partial x} = a, \dfrac{\partial f}{\partial y} = b$ これを偏微分という、大学１年生の後期に微分 積分の中で習うことになっているのだ。$f(x, y) = ax^2 + by^3 + c, \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2ax, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3by^2$

$f(x, y) = ax^2y^3 + c, \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2axy^3, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3ax^2y^2$ $f(x, y) = a\sin(xy), \dfrac{\partial f}{\partial x} = ay\cos(xy), \dfrac{\partial f}{\partial y} = ax\cos(xy)$

$f(x, y) = ae^{-xy}, \dfrac{\partial f}{\partial x} = -aye^{-xy}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -axe^{-xy}$ $f(x, y) = a\ln(x - y), \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{a}{(x - y)}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-a}{(x - y)}$

$f(x, y) = a\sqrt{(x^2 + y^2)}, \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{ax}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{ay}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$ ここまでできればまあ使い物になる。その極意が偏微分でxで（偏）微分すると きは,yは定数と思っているし、反対にyで（偏）微分するときは,xは定数と思っているのだ。

独立した２変数x,yについて、$f = f(x, y)$ つま り、測定した変数は２個xとｙがある時を考える。２変数の偏微分を定義したので、

$$f(x)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+(y-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$+(x-x_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+(y-y_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+\cdots$$

また例によってx-x0,y-y0が０に近いので、近似をつかい、f=ax +by+cの形にして、

この式からfの標準偏差の二乗（分散）を σ_f^2 はx の標準偏差の二乗（分散）を σ_x^2、y の標準偏差の二乗（分散）を σ_y^2 から次のようにかかれる

$$\sigma_f^2=a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2=\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right\}^2\sigma_x^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right\}^2\sigma_y^2$$

x,yが独立でないときは

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}^2\mathrm{cov}(x,y)\sigma_x\sigma_y$$

の項が付け加わるが、実際上これを用いることはほとんどない。

2変数以上の一般の場合もこれにまねて、

$$\sigma_f^2=\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_x^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_y^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_z^2+\cdots.$$

こ れを精度の伝搬式と呼ぶ（精度を誤差と呼ぶ教科書もある）。

さていよいよ、測定値xの平均値の計算が重み付き平均で $\langle x\rangle=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}}$ そ の重みを $\dfrac{1}{\sigma^2}$ つかい、その精度を表す標準偏差 $\sigma^2=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}}$ とかく理由を述べる。重みをいまからaiと付けよ

う。xiの重み付き平均は $< x >= \dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}$ と書くべきである。すなわち重みaiを各データxiにかけて、全部を加えあげ る、ただし重みは人為的な量なので、これの寄与は分母で相殺しておく、という式である。もちろんこの式が普通に用いられる平均（重みがすべて同じ場合である）と同等であることはおきらかだ。 $\alpha = \sum_{i=1}^{N} a_i$ とい うαを定義して、平均は $< x >\equiv \dfrac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{N} a_j x_j$ と書かれる。これをxの関数f(x)と考えて 精度の伝搬式を用いると、

$$f(x) =< x >= \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

$$\sigma_{<x>}^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2 \sigma_1^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2 \sigma_2^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_3}\right]^2 \sigma_3^2 + \ldots$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{N} a_j x_j}{\partial x_i}\right]^2 \sigma_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\alpha} a_i\right]^2 \sigma_i^2 \equiv \frac{\beta}{\alpha^2}, \beta = \sum_{i=1}^{N}\left[a_i\right]^2 \sigma_i^2$$

よって問題は最終結果 $\sigma_{<x>}^2$ を**最小にする**重み a_i をどう取れば良いのかという問題に帰着させる事ができる。 $\sigma_{<x>}^2 \equiv \dfrac{\beta}{\alpha^2}$ とかきかえて、 $\alpha = \sum_{i=1}^{N} a_i, \beta = \sum_{i=1}^{N}\left[a_i\right]^2 \sigma_i^2$ なので、 $\sigma_{<x>}^2$ は a_i の関数であるという事にする。すると、 $\sigma_{<x>}^2$ が極小値をとる a_i をを求めなさいという問いで、算数の問題とできる。この答えは $\sigma_{<x>}^2$ を a_i で微分してゼロになる点を探す作業になる。が、aiはたくさんあるので、微分は 偏微分となる。 $\dfrac{\partial \sigma_{<x>}^2}{\partial a_j} = 0 = \dfrac{\partial \frac{\beta}{\alpha^2}}{\partial a_j} = \dfrac{\alpha^2 \frac{\partial \beta}{\partial a_j} \quad \beta \frac{\partial \alpha^2}{\partial a_j}}{\alpha^4} = \dfrac{\alpha^2 \frac{\partial \beta}{\partial a_j} \quad 2\alpha\beta\frac{\partial \alpha}{\partial a_j}}{\alpha^4}$ ここで

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} a_j : \frac{\partial \alpha}{\partial a_j} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{N} a_j}{\partial a_j} = 1 \,@\, i = j$$

$$\beta = \sum_{j=1}^{N} \left[a_j\right]^2 \sigma_j^2 : \frac{\partial \sum_{j=1}^{N} \left[a_j\right]^2 \sigma_j^2}{\partial a_j} = 2a_j\sigma_j^2$$ よって $$\frac{\partial \sigma_{<x>}^2}{\partial a_j} = 0 = \frac{\alpha^2\left[2a_j\sigma_j^2\right] - 2\alpha\beta[1]}{\alpha^4} = \frac{2a_j\alpha\sigma_j^2 - 2\beta}{\alpha^3}$$

$$\Longrightarrow a_j = \frac{\beta}{\alpha\sigma_j^2}$$ と決定できる、また規格化条件を付けて（本来重みa_iは全部が同じ場合でも1でも10でも良いので、$\alpha = \sum_{j=1}^{N} a_j = 1$としてしまう。よって、$a_j = \frac{\beta}{\alpha\sigma_j^2} = \frac{\beta}{\sigma_j^2}$

$$\beta = \sum_{j=1}^{N} \left[a_j\right]^2 \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\beta}{\sigma_j^2}\right]^2 \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\beta}{\sigma_j^2}\right]^2 \sigma_j^2 = \beta^2 \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]$$ $$1 = \beta \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right] \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]}$$ から

$$a_j = \frac{\beta}{\sigma_j^2} = \frac{1}{\sigma_j^2 \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]}$$ 最終的に<x>は $$\Rightarrow \langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i}{1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} x_i$$

で最初の式が完成する。また $$\sigma_{<x>}^2 = \frac{\beta}{\alpha^2} = \beta = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]}$$ となる。

$$\sigma_f^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 \sigma_y^2 + \dots$$

$$f(x,y) = x + y \Rightarrow \sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f(x,y) = x - y \Rightarrow \sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f(x,y) = xy \Rightarrow \sigma_f^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2$$

精度の伝搬式で

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \sigma_f^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$$

より最後の式は相対精度の計算式で例えばｘ の相対精度が３％、ｙの相対精度が４％であるならば、ｆの相対精度は５％であり、ｘの相対精度より、ｙの相対精度より、**悪い**。

問題：2つの抵抗を測定しました。その結果はそれぞれ、15.3+-0.4オーム,24.8+-0.7オームであった。これら２つの抵抗を直列につないだ結果は何オームになるか？また並列の場合はどうか？

問題：ある山の高さを測定して、仰角を27.8°、27.3°、28.2°、26.9°、27.5°という結果を得た。また山の頂上からの距離を地図から 945m、971m、912m、954m、982mと得た。山の高さとその精度を考えよ。

問題：x=76.3+-2.1,y=101.4+-4.2とのき、f(x,y)=x+yとその精度を計算せよ。またf(x,y)=x*yの時を計算せよ。 さらにf(x,y)=x/yの場合を計算せよ。
f(x,y)=x*y/sqrt(x*x+y*y)の時はどうか？

問題：　重力定数gを振り子を使って測定せよ。 振り子の実験では振り子の長さxと振動の周期Tを測定量として、

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

という関係がある。この式を使え。

問題：　摩擦のない斜面を滑り落ちる物体の位置と時刻を測定して重力加速度を求めよ。

解の例

物理実験学　　(5)

竹下徹　(04June2002)

精度の伝搬（誤差の伝搬ともいう人もいる）：

種々の測定値があるとき、**どうやってまとめるか**考えよう。

精度の評価が異なる２つの実験結果をどうやって組み合わせるべきか？

例：２つの電圧計があって、同じ電圧を測ったとしよう。
電圧計Aの最小メモリは1Ｖ,電圧計Bの最小メモリは0.1Ｖ,
電圧計Aの読みVAと電圧計Bの読みVBの両方を知ってあなたはどういう結論をくだすか？
アイデfア１　電圧計Aの精度は悪いので、そのデータを無視する。
アイデア2　電圧計Aの読みと電圧計Bの読みの平均値を取る。
アイデア３：アイデア１とアイデア２を含むやり方、重みを定義する。
　　WAとWBとしよう、２つの電圧計で測った２つの測定の総合結果として、
　　V=(WA*VA+WB*VB)/(WA+WB) として電圧を得る。
アイデア１はWA=0.0,WB=1.0に相当する、アイデア２はWA=0.5,WB=0.5ということ。
どうやって　WA,WBを決めるべきか？

この場合電圧計の違いは最小メモリだけであるので、これを測定精度と考え、
WA=WB/10とすべきであろう、

これの拡張として　一般に　測定精度　を標準偏差 σ と取り、重み $\frac{1}{\sigma^2}$ をとることが行われる、

すなわち、精度の良い実験では σ は小さい、よって重み $\frac{1}{\sigma^2}$ は大きい、また

　　精度の悪い実験では σ は大きい、よって重み $\frac{1}{\sigma^2}$ は小さい、という合理的な重みを与える（なぜ２乗なのかは後で考える）。よって 各種の異なる精度を持つ値　xiの平均値

<x>は $\displaystyle < x > = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma^2}}$ で 計算し、その精度を表す標準偏差 $f = ax + by + c$
とかかれる。証明はあとで。

例を示そう：もしも測定データxiの組が関数f(x)に従うならさらに、$f(x) = ax + b$ と いう一次関数のとき：
つまりxiがばらばらとばらつくときf(x)はどのような振る舞いをするのか？

ばらつきは、標準偏差あるいは分散で表される：fの標準偏差を σ_f ,x の標準偏差を σ_x として

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= < f^2 > - < f >^2 \\
&= < (ax+b)^2 > - < ax+b >^2 \\
&= < a^2x^2 + 2abx + b^2 > - (a < x > + b)^2 \\
&= a^2 < x^2 > + 2ab < x > + b^2 - a^2 < x >^2 - 2ab < x > - b^2 \\
&= a^2 < x^2 > - a^2 < x >^2 \\
&= a^2(< x^2 > - < x >^2) \\
&= a^2\sigma_x^2
\end{aligned}$$

つまり $\sigma_f^2 = a^2\sigma_x^2, \sigma_f = |a|\sigma_x$

:そりゃa倍したので、広がりもa倍になる！bは広がりに関与しない。では一 般の関数のときはどうするか？次のテーラー(Talyor)展開の式を使う。

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \ldots$$

この式は

$x \approx x_0, (x - x_0) \approx 0$ の近似の成り立つ領域で成立する。ここで、測定値xと書いたが、これがx0付 近であるということは、x0=<x>で有ることを意味している。中心極限定理によりxはガウス分布をしその分散（＝標準偏差＾２＝標準偏差の ２乗）が<x^2>-<x>^2であることも解っている。
その極意は、どんな関数でもxのべき乗　x^n（xの n乗）で書くことができるという点にある。
例題：次の関数をTalyor展開せよ。

$$(1) f(x) = e^x, (2) f(x) = \ln(x), (3) f(x) = \sin(x), (4) f(x) = \cos(x)$$

よって、$(x - x_0)^2$ などはとても小さい、よって無視する！！そうす ると、

$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ と一次式に持ち込める。すなわち

$$f(x)=\left\{f(x_0)-x_0\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right\}+\left\{\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right\}x$$

$f(x)=ax+b, a=\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}, b=f(x_0)-x_0\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ よって

$\sigma_f^2=|a|^2\sigma_x^2=\left(\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}\right)^2\sigma_x^2$ という式を得る。これがより一般化された精度を計算する式である。

さらに一般化を進める。つまり、f(x)はいつも変数xだけの関数とは限らないということだ。が始めからそれをするのは大変なので、２変数つまり $f=f(x,y)$ つま り、測定した変数は２個xと y がある時を考える。このとき測定量は(xi,yi)の組として測定されている、例えば、糸と重りで振り子を作る。振り子の振 動の長さを求めるには、糸の長さ(=x)と重りの重心までの距離（おおかた重りの半径）(=y)を測定することになる。さてこの振り子の振動の長さ($\ell=x+y$) で計算されるはずだ。このxとyの測定はそれぞれ行われそれぞれの平均値<x>,<y>と分散（あるいは標準偏差）が判っている 時、振り子長さの値とその精度はどうやって計算すべきかという問題である。ここでも最も簡単な仮定から始める。すなわち $f=ax+by+c$ とかかれるときの分散の計算となる。もちろんx,yが変動する可能性があり、 その結果がfにどのように伝わるかを計算する事になる。fのばらつきは、標準偏差あるいは分散で表される：fの標準偏差の二乗（分散）を σ_f^2 ,xの標準偏差の二乗（分散）を σ_x^2、y の標準偏差の二乗（分散）を σ_y^2 としよう。

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \langle f^2\rangle-\langle f\rangle^2=\langle(ax+by+c)^2\rangle-\langle ax+by+c\rangle^2\\ &= a^2(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2)+b^2(\langle y^2\rangle-\langle y\rangle^2)+2ab\{\langle xy\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle\}\\ &= a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2+2ab\,\mathrm{cov}(x,y)\\ &= a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2\end{aligned}$$

xとyは独立しているので、cov(x,y)=0であるので、独立２変数に 拡張した精度の伝搬式が得られた。これによるとf=ax+by+cのときfの精度を決めるのはaとbであり、2乗和で効いてくる。2乗和ではfの精度(σ_f^2) は $\sigma_f^2>\sigma_x^2$、σ_y^2 である(a,b>1のとき）。つまりfの相対精度（ $\frac{\sigma_f}{f}$ ）は必ずxの相対精度($\frac{\sigma_x}{x}$)より、yの相対精度($\frac{\sigma_y}{y}$)より悪くなる（大きくなる）ことが示めされる。各自計算せよ。

さらに一般化する、すなわち複数変数の関数f(x,y)時へ拡張する。つまり、測定結果fを得るため

に、x,やy等を測定しなければならず、x, yは測定結果であるので、精度を持つ。またTalyor展開を使いたいが、多変数のTalyor展開はどうするかが問題である。一変数のTalyor展開 を次のよう書いた。$x \approx x_0, (x - x_0) \approx 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left[\frac{d^2 f}{dx^2}\right]_{x=x_0} + \ldots$$

これを独立な２変数へ拡張して次のように書く、

$$f(x) = f(x_0, y_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{(y-y_0)}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$+ \frac{(x-x_0)^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \frac{(y-y_0)^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} + \ldots$$

独立な2変数のtaylor展開式の中の $\frac{\partial f}{\partial x}$ や $\frac{\partial f}{\partial y}$ はなにか。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim}\left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \underset{\Delta y \to 0}{Lim}\left[\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]$$

である、これが定義であるが、実際が重要なので、例題をあげる

$$f(x, y) = ax + by + c, \frac{\partial f}{\partial x} = a, \frac{\partial f}{\partial y} = b$$

これを偏微分という、大学１年生の後期に微分 積分の中で習うことになっているのだ。

$$f(x, y) = ax^2 + by^3 + c, \frac{\partial f}{\partial x} = 2ax, \frac{\partial f}{\partial y} = 3by^2$$

$$f(x, y) = ax^2y^3 + c, \frac{\partial f}{\partial x} = 2axy^3, \frac{\partial f}{\partial y} = 3ax^2y^2 \quad f(x, y) = a\sin(xy), \frac{\partial f}{\partial x} = ay\cos(xy), \frac{\partial f}{\partial y} = ax\cos(xy)$$

$$f(x, y) = ae^{-xy}, \frac{\partial f}{\partial x} = -aye^{-xy}, \frac{\partial f}{\partial y} = -axe^{-xy} \quad f(x, y) = a\ln(x-y), \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a}{(x-y)}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-a}{(x-y)}$$

$$f(x, y) = a\sqrt{(x^2+y^2)}, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ax}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{ay}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$

ここまでできればまあ使い物になる。その極意が偏微分でxで（偏）微分すると きは,yは定数と思っているし、反対にyで（偏）微分するときは,xは定数と思っているのだ。

独立した２変数x,yについて、$f = f(x, y)$ つま り、測定した変数は２個xと y がある時を考える。２変数の偏微分を定義したので、

$$f(x)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+(y-y_0)\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$+(x-x_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+(y-y_0)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}+\cdots$$

また例によってx-x0,y-y0が０に近いので、近似をつかい、f=ax +by+cの形にして、

この式からfの標準偏差の二乗（分散）を σ_f^2 はx の標準偏差の二乗（分散）を σ_x^2、y の標準偏差の二乗（分散）を σ_y^2 から次のようにかかれる

$$\sigma_f^2=a^2\sigma_x^2+b^2\sigma_y^2=\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right\}^2\sigma_x^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\right\}^2\sigma_y^2$$

x,yが独立でないときは

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}^2\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}^2\mathrm{cov}(x,y)\sigma_x\sigma_y$$

の項が付け加わるが、実際上これを用いることはほとんどない。

2変数以上の一般の場合もこれにまねて、

$$\sigma_f^2=\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_x^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_y^2+\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0\\z=z_0\\\cdots}}\right\}^2\sigma_z^2+\cdots$$

こ れを精度の伝搬式と呼ぶ（精度を誤差と呼ぶ教科書もある）。

さていよいよ、測定値xの平均値の計算が重み付き平均で

$$<x>=\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{x_i}{\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}}$$

そ の重みを $\frac{1}{\sigma^2}$ つかい、その精度を表す標準偏差

$$\sigma^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma^2}}$$

とかく理由を述べる。重みをいまからaiと付けよ

う。xiの重み付き平均は $<x>=\dfrac{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}$ と書くべきである。すなわち重みaiを各データxiにかけて、全部を加えあげ る、ただし重みは人為的な量なので、これの寄与は分母で相殺しておく、という式である。もちろんこの式が普通に用いられる平均（重みがすべて同じ場合である）と同等であることはおきらかだ。 $\alpha=\sum_{i=1}^{N} a_i$ とい うαを定義して、平均は $<x>\equiv\dfrac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{N} a_j x_j$ と書かれる。これをxの関数f(x)と考えて 精度の伝搬式を用いると、

$$f(x)=<x>=\frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{N} a_i x_i$$

$$\sigma_{<x>}^2=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]^2\sigma_1^2+\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^2\sigma_2^2+\left[\frac{\partial f}{\partial x_3}\right]^2\sigma_3^2+\ldots$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]^2\sigma_i^2=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{N} a_j x_j}{\partial x_i}\right]^2\sigma_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\alpha}a_i\right]^2\sigma_i^2\equiv\frac{\beta}{\alpha^2},\beta=\sum_{i=1}^{N}\left[a_i\right]^2\sigma_i^2$$

よって問題は最終結果 $\sigma^2_{<x>}$ を**最小にする**重み a_i をどう取れば良いのかという問題に帰着させる事ができる。 $\sigma_{<x>}^2\equiv\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ とかきかえて、 $\alpha=\sum_{i=1}^{N} a_i,\beta=\sum_{i=1}^{N}\left[a_i\right]^2\sigma_i^2$ なので、 $\sigma^2_{<x>}$ は a_i の関数であるという事にする。すると、 $\sigma^2_{<x>}$ が極小値をとる a_i をを求めなさいという問いで、算数の問題とできる。この答えは $\sigma^2_{<x>}$ を a_i で微分してゼロになる点を探す作業になる。が、aiはたくさんあるので、微分は 偏微分となる。 $\dfrac{\partial\sigma_{<x>}^2}{\partial a_i}=0=\dfrac{\partial\dfrac{\beta}{\alpha^2}}{\partial a_i}=\dfrac{\alpha^2\dfrac{\partial\beta}{\partial a_i}\quad\beta\dfrac{\partial\alpha^2}{\partial a_i}}{\alpha^4}=\dfrac{\alpha^2\dfrac{\partial\beta}{\partial a_i}\quad 2\alpha\beta\dfrac{\partial\alpha}{\partial a_i}}{\alpha^4}$ ここで

$$\alpha=\sum_{j=1}^{N}a_j:\frac{\partial\alpha}{\partial a_j}=\frac{\partial\sum_{j=1}^{N}a_j}{\partial a_j}=1\,@i=j$$

$$\beta=\sum_{j=1}^{N}\left[a_j\right]^2\sigma_j^2:\frac{\partial\sum_{j=1}^{N}\left[a_j\right]^2\sigma_j^2}{\partial a_j}=2a_j\sigma_j^2$$ よって $$\frac{\partial\sigma_{<x>}^2}{\partial a_j}=0=\frac{\alpha^2\left[2a_j\sigma_j^2\right]-2\alpha\beta[1]}{\alpha^4}=\frac{2a_j\alpha\sigma_j^2-2\beta}{\alpha^3}$$

$$\Longrightarrow a_j=\frac{\beta}{\alpha\sigma_j^2}$$ と決定できる、また規格化条件を付けて（本来重み a_i は全部が同じ場合でも1でも10でも良いので、$\alpha=\sum_{j=1}^{N}a_j=1$ としてしまう。よって、$a_j=\frac{\beta}{\alpha\sigma_j^2}=\frac{\beta}{\sigma_j^2}$

$$\beta=\sum_{j=1}^{N}\left[a_j\right]^2\sigma_j^2=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\beta}{\sigma_j^2}\right]^2\sigma_j^2=\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\beta}{\sigma_j^2}\right]^2\sigma_j^2=\beta^2\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]^{1}=\beta\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]\Rightarrow\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]}$$ から

$$a_j=\frac{\beta}{\sigma_j^2}=\frac{1}{\sigma_j^2\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]}$$ 最終的に<x>は $$\Rightarrow<x>=\frac{\sum_{i=1}^{N}a_ix_i}{\sum_{i=1}^{N}a_i}=\frac{\sum_{i=1}^{N}a_ix_i}{1}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_j^2}\right]}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}x_i$$

で最初の式が完成する。また $$\sigma_{<x>}^2=\frac{\beta}{\alpha^2}=\beta=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{\sigma_i^2}\right]}$$ となる。

$$\sigma_f^2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 \sigma_y^2 + \dots$$

$$f(x,y) = x + y \Rightarrow \sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f(x,y) = x - y \Rightarrow \sigma_f^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$f(x,y) = xy \Rightarrow \sigma_f^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2$$

精度の伝搬式で $f(x,y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \sigma_f^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ より最後の式は相対精度の計算式で例えばｘ の相対精度が３％、ｙの相対精度が４％であるならば、ｆの相対精度は５％であり、ｘの相対精度より、ｙの相対精度より、**悪い**。

問題：2つの抵抗を測定しました。その結果はそれぞれ、15.3+-0.4オーム,24.8+-0.7オームであった。これら２つの抵抗を直列につないだ結果は何オームになるか？また並列の場合はどうか？

問題：ある山の高さを測定して、仰角を27.8°、27.3°、28.2°、26.9°、27.5°という結果を得た。また山の頂上からの距離を地図から 945m、971m、912m、954m、982mと得た。山の高さとその精度を考えよ。

問題：x=76.3+-2.1,y=101.4+-4.2とのき、f(x,y)=x+yとその精度を計算せよ。またf(x,y)=x*yの時を計算せよ。 さらにf(x,y)=x/yの場合を計算せよ。
f(x,y)=x*y/sqrt(x*x+y*y)の時はどうか？

問題：　重力定数gを振り子を使って測定せよ。 振り子の実験では振り子の長さxと振動の周期Tを測定量として、 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ という関係がある。この式を使え。

問題：　摩擦のない斜面を滑り落ちる物体の位置と時刻を測定して重力加速度を求めよ。

[解の例](#)

物理 実験学 (6)

竹下徹 (029july2004)

推定：実験結果から本当の値を推定するにはどうするか？

種々の測定があるとき、結果はその関数であるときどうやって推定するか。

真の値がaのときある測定値 x を得る確率密度を $\hat{P}(x:a)$ とする、一連の複数の測定結 果 {x1,x2,x3,,,xN}の結果を得る全体の確率密度 $\hat{L}(x_1, x_2,,, x_N; a) = \hat{P}(x_1:a)\hat{P}(x_2:a)\ldots\hat{P}(x_N:a)$ と各測定の確率の積でかかれる。ということは測定値xiの関数f(x1,x2,,, xN)があるとき、その平均値<f(x1,x2,,xN)> は確率解釈をすると、一変数にまねて

$$\langle f(x_1, x_2, \ldots x_N)\rangle = \int f(x_1', x_2', \ldots x_N')\hat{P}(x_1':a)\hat{P}(x_2':a)\ldots\hat{P}(x_N':a)dx_1'dx_2'\ldots dx_N'$$

$$\langle f(x_1, x_2, \ldots x_N)\rangle = \int f(x_1', x_2', \ldots x_N')\hat{L}(x_1', x_2', \ldots x_N')dx_1'dx_2'\ldots dx_N'$$ を

$x_1, x_2, \ldots x_N = X$ として、 $\langle f(X)\rangle = \int f(X)\hat{L}(X)dX$ と 書いてしまおう。このとき

$$\sigma_a^2 \geq \frac{1}{\left\langle \left| \frac{d\log L}{da} \right|_{a=\hat{a}} \right\rangle} = \frac{-1}{\left\langle \left| \frac{d^2\log L}{da^2} \right|_{a=\hat{a}} \right\rangle}$$

が 成立する。この式は MinimumVariance Bound (MVB) と呼ばれる式が証明されている。ここで $\hat{a}$ は真 の値 a の 推定値を意味する。我々が計算できるのはこの $\hat{a}$ の 値のみであ る。

例えば分布がガウス分布に従うとき、

$$\hat{P}(x_i; a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\ln L = -\sum_i \frac{(x_i - a)^2}{2\sigma^2} - N\ln(\sigma\sqrt{2\pi})$$

$$\frac{d\ln L}{da} = \sum_i \frac{(x_i - a)}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{a}{\sigma^2}\sum 1$$

$$\frac{d^2 \ln L}{da^2} = \frac{d}{da}\left(\frac{d\ln L}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum x_i - \frac{a}{\sigma^2}N\right) = -\frac{N}{\sigma^2}$$

$$\sigma_{\hat{a}}^2 \geq \frac{1}{<\left(\frac{d\ln L}{da}\right)^2>} = \frac{-1}{<\left(\frac{d^2\ln L}{da^2}\right)>} = \frac{\sigma^2}{N}$$

な ので $\sigma_{\hat{a}}^2 \geq \frac{\sigma^2}{N}$ が 成立する。ここでは $x_i \pm \sigma_i = x_i \pm \sigma$ つまりすべての精度が等しいときには、大数の法則が成 り立つなら、推定値と真値は等しい。 $\hat{a} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum x_i}{N} = a$ N 個の同種の測定から得られ る分散と $\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$ の 関係が成立する。つまり中心極限定理でしめし た複数のガウ ス分布をする測定の分散は1/Nになる結果と一致する。

推定法：Maximum Likelihood (ML) 推定法（最ゆう（尤）法）：Lの最 大値を与えるaの推定値 $\hat{a}$ を 与えるという方法で各xiがガウス分布するとき（確率密度関数として　ガウス関数を取って）、 $P(x_j; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ （た だし全ての分散 σ_i^2 は等しいとする）

$$L(x_1, x_2,,, x_N; a) = P(x_1; a)P(x_2; a)P(x_3; a)....P(x_N; a)$$

$$\ln L = \ln P(x_1; a) + \ln P(x_2; a) + ... + \ln P(x_N; a) = \sum_{i=1}^{N} \ln(P(x_i; a))$$

がL の定義で、すべてPの積の形なのでlnLはlnP の和となる。これをガウス分布の場合

$$\ln P(x_j; \mu, \sigma) = -\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

に 当てはめると、すべてのi について和を取ると、

$$\ln L = \sum \ln P(x_i; \mu, \sigma) = -\sum \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \sum \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\left.\frac{d\ln L}{d\mu}\right|_{\mu=\hat{\mu}} = 2\sum (x_i - \hat{\mu})\frac{1}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum (x_i - \hat{\mu}) = 0$$

という当たり前の答えを得る。これは、正しい 推定では 推定された平均値とデータの平均は一致するというものだ。一方分散の推

定では、 $\left.\frac{d\ln L}{d\sigma}\right|_{\mu=\hat{\mu},\sigma=\hat{\sigma}} = -\sum\frac{1}{\hat{\sigma}} + \sum\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}^3} = 0 \Rightarrow -\frac{N}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum(x_i-\hat{\mu})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i-\hat{\mu})^2}{N}$ と なる。

問題：ポアソン分布に対するML推定を行え。

$P_{Poisson}(r_i;\lambda) = \frac{\lambda^{r_i}}{r_i!}e^{-\lambda}$ 各riがポアソン分布する（つまり、離散型の時は正確に確率Pの積としてLを定義できる）とき、

$L(r_1, r_2,,, r_N; a) = P_{Poisson}(r_1;\lambda)P_{Poisson}(r_2;\lambda)\cdots P_{Poisson}(r_N;\lambda)$ がL の定義で、すべてPの積の形なのでlnLはlnP の和となる。これをポアソン分布分布の場合に当てはめると、

$\ln L = \sum\ln P_{Poisson}(r_i;\lambda) = \sum(r_i\ln\lambda - \lambda - \ln(r_i!))$ これは、正しい推定では推定された平均値 λ に対 して次の式がなりたつ。 $\left.\frac{d\ln L}{d\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0$ 。実際のポアソン　分布の関数形を代入する と、 $\frac{d\ln L}{d\lambda} = \sum(\frac{r_i}{\lambda} - 1)$ と なり、 $\lambda = \hat{\lambda}$ で これがゼロとなるから

$\left.\frac{d\ln L}{d\lambda}\right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \sum(\frac{r_i}{\hat{\lambda}} - 1) = \frac{1}{\hat{\lambda}}\sum r_i - N = 0$ より、 $\hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum r_i = < r >$ をえる。つまりポアソン分布するデータriの平均値がポアソン分布の期待値λの推定値を与えている。

問題：指数分布に対するML推定を行え。￥グラフは　上に凸になる。頂点が最大値で=

推定法：Maximum Likelihood 推定法の応用

データの組(xi,yi)が得られるとき、例えば、ストップウオッチで移動する物体の速さを測ろうとするとき、xiは道につけられた位 置を表し、 yiは時計の読みである、このときaは速さと言う関係になる。

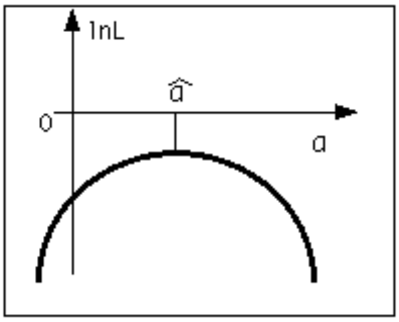
測定データからある量aを推定する方法のうちyiがf(xi,a)との差がガウス分布をとるとき最小二乗法と呼ばれる。 $y_i = f(x_i, a), P(y_i;a) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y_i - f(x_i,a))^2}{2\sigma_i^2}} \Rightarrow \ln L = \sum\ln P(y_i;a)$

$$\ln L = -\sum \ln(\sigma_i\sqrt{2\pi}) - \sum \frac{\left[y_i - f(x_i;a)\right]^2}{2\sigma_i^2} < 0$$

この$\ln L<0$は負であり、複数のデータ（xi,yi）の組からaを推定することは、lnLの最大値(Maximum Likelihood)（Lは確率あるいは（離散型の場合）、確率密度関数の積　であるのでほぼ最大確率を意味する）を与えるaを求めることである。

$$\ln L = constant - \frac{\chi^2}{2}, \chi^2 \equiv \sum \frac{\left[y_i - f(x_i;a)\right]^2}{\sigma_i^2}$$

ということは この定義によるカイ二乗の最小値を求める事に相当する。そのため、これを最小二乗法と呼ぶ。



lnL の最大値を探す　Maximum Likelihood法はMVBにより最小の分散σ_a^2を探 すことに相当する。なぜなら

$$\sigma_a^2 \geq \frac{1}{\left\langle\left(\frac{d\ln L}{da}\right)^2\right\rangle} = \frac{-1}{\left\langle\left(\frac{d^2\ln L}{da^2}\right)\right\rangle} : MVB$$

で あるから。推定法：最小二乗法

データの組(xi,yi)が得られるとき、yiがf(xi,a)との差がガウス分布をするとき最小二乗法と呼ばれる。

$$\chi^2 \equiv \sum \frac{\left[y_i - f(x_i)\right]^2}{\sigma_i^2}$$

この定義によるカイ二乗の最小値を求めるには、

$$\left.\frac{d\chi^2}{da}\right|_{a=\hat{a}} = 0$$

を満たす$\hat{a}$を 探し当てればよい。つまり次の式を計算する。

$$\left.\frac{d\chi^2}{da}\right|_{a=\hat{a}} = \sum \frac{-2}{\sigma_i^2}\left[y_i - f(x_i;a)\right]\frac{df(x_i;a)}{da} = 0$$

次はf(xi,;a)の形を決めないと計算不可能なの で、まず、$f(x_i;a) = ax_i$の時を考える。

$$\chi^2 \equiv \sum \frac{\left[y_i - ax_i\right]^2}{\sigma_i^2} \Rightarrow \frac{d\chi^2}{da} = \sum\left[-2x_i\frac{y_i - ax_i}{\sigma_i^2}\right]$$

計算を簡単にするためにすべての*が等しい場合を考え よう。$\sigma_i^2 = \sigma^2$

$$\left.\frac{d\chi^2}{da}\right|_{a=\hat{a}} = \frac{-2}{\sigma^2}\sum\left[x_i(y_i-\hat{a}x_i)\right]=0 \Rightarrow \sum\left[x_i(y_i-\hat{a}x_i)\right]=0$$

$$\sum x_i y_i = \hat{a}\sum x_i^2 \Rightarrow \hat{a} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\frac{1}{N}\sum x_i y_i}{\frac{1}{N}\sum x_i^2} = \frac{<(xy)>}{<x^2>}$$

$$\sigma_a^2 = \sigma_a^2(x,y) = \sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial y_i}\right)^2\sigma_y^2 + \sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial x_i}\right)^2\sigma_x^2 = \sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial y_i}\right)^2\sigma_y^2 = \left(\frac{\frac{1}{N^2}\sum x_i^2}{<x^2>^2}\right)\sigma_y^2 = \frac{\sigma_y^2}{N<x^2>}$$

ここでは　x方向の精度は無限に良い、すなわち $\sigma_x^2 = 0$ としてy方向の精度のみ問題にした。

問題：等速直線運動を観測し、次の時刻tと位置xのデータを得た。

t 0 1.0 2.0　 3.0　 4.0　 5.0 (秒)

x 0 14.5　30.3　 43.8　 58.9　 77.1　（m）　速さ、と速さの精度とカイ二乗を計算せよ。

B　時間の精度は大変良く、一方位置の測定 精度がそれぞれ+-0.5mとする。

最もよく使われるのはこの式のもうちょっと一般化された一次式である、なぜなら　y=f(x)=ax というのはx=0でy=0を要求し ており、強い 制限を課しているからである。それに対してここで行うy=f(x)=ax+bの場合それがない線形で一般的な場合である。

$$\chi^2 \equiv \sum\frac{\left[y_i-ax_i-b\right]^2}{\sigma_i^2} \Rightarrow \frac{d\chi^2}{da} = \sum\left[-2x_i\frac{y_i-ax_i-b}{\sigma_i^2}\right]$$

$$\left.\frac{\partial\chi^2}{\partial a}\right|_{\substack{a=\hat{a}\\ b=\hat{b}}} = \frac{-2}{\sigma^2}\sum\left[x_i(y_i-\hat{a}x_i-\hat{b})\right]=0 \Rightarrow \sum\left[x_i(y_i-\hat{a}x_i-\hat{b})\right]=0$$

つまり

$$\sum\left(x_i y_i - \hat{a}x_i^2 - \hat{b}x_i\right) = <xy> - \hat{a}<x^2> - \hat{b}<x> = 0$$

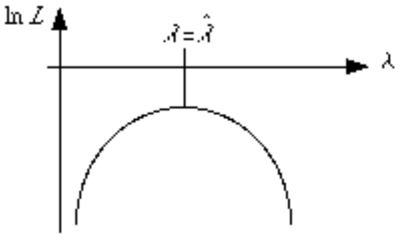
を 得る。同様にbについて微分して0であるこ とを要求する と、

$$\left.\frac{\partial\chi^2}{\partial b}\right|_{\substack{a=\hat{a}\\ b=\hat{b}}} = \frac{-2}{\sigma^2}\sum\left[1(y_i-\hat{a}x_i-\hat{b})\right]=0 \Rightarrow \sum\left[(y_i-\hat{a}x_i-\hat{b})\right]=0$$

$$\langle y\rangle - \hat{a}\langle x\rangle - \hat{b} = 0$$

a,bについての連立方程式と

見立てて、解くと。$\hat{a}=\dfrac{<xy>-<x><y>}{<x^2>-<x>^2},\hat{b}=\dfrac{<x^2><y>-<x><xy>}{<x^2>-<x>^2}=<y>-\hat{a}<x>$ を 得ることになる。こうして原点が不確かな実験にあってもこれもfittingの自 由度として取り入れて決定できる。さて次はこれの精度を表す量



を 計算しよう。精度の伝搬式より、

$$\sigma_{\hat{a}}^2=\sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2+\sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial y_i}\right)^2\sigma_{y_i}^2=\sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial x_i}\right)^2 0+\sum\left(\frac{\partial\hat{a}}{\partial y_i}\right)^2\sigma^2$$

$$=\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{<xy>-<x><y>}{<x^2>-<x>^2}\right)\right)^2\sigma^2=\sum_i\left(\frac{x_i-<x>}{(<x^2>-<x>^2)N}\right)^2\sigma^2$$

$$=\left[\sum_i\frac{(x_i-<x>)^2}{N}\right]\frac{\sigma^2}{(<x^2>-<x>^2)^2N}=\left[<x^2>-<x>^2\right]\frac{\sigma^2}{(<x^2>-<x>^2)^2N}$$

$$=\frac{\sigma^2}{(<x^2>-<x>^2)\ N}$$

また

$$\sigma_{\hat{b}}^2=\sum\left(\frac{\partial\hat{b}}{\partial y_i}\right)^2\sigma_{y_i}^2=\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{<x^2><y>-<x><xy>}{<x^2>-<x>^2}\right)\right]^2\sigma^2$$

$$=\sum_i\left[\frac{<x^2>-<x>x_i}{N(<x^2>-<x>^2)}\right]^2\sigma^2=\frac{<x^2>^2-2<x^2><x><x>+<x>^2<x^2>}{N\,(<x^2>-<x>^2)^2}\sigma^2$$

$$=\frac{<x^2>(<x^2>-<x>^2)}{N\,(<x^2>-<x>^2)^2}\sigma^2=\frac{<x^2>}{N\,(<x^2>-<x>^2)}\sigma^2$$

と 計算できる。今まではずうと計算の楽さの ために等しい σ_i^2 の場合を計算して来たが、異なる場合は、

$$<y>=\frac{\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}},\sigma^2=\frac{\sum\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}=\frac{N}{\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

と いう置き換を行い、

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum^N \frac{1}{\sigma_i^2}}{N(<x^2>-<x>^2)} = \frac{1}{(<x^2>-<x>^2)\sum\frac{1}{\sigma_i^2}}$$ とすればよい。

このさてこのカイ二乗は分布関数の一つである。すなわちガウス分布や指数分布のようにであ

$$\chi^2 \equiv \sum\frac{\left[y_i - f(x_i)\right]^2}{\sigma_i^2}$$

る。カイ二乗 は[(y の測定値)-(yの理想値)]の二乗/(yの精度の二乗)と読め る。カイ 二乗が小さいということは測定値が理想値に近い事を表している。逆にカイ二乗が大きいということはy=f(x)という関数への当てはめがよろしくない、あ るいは間違っている事を示唆している。カイ二乗をyと関数への当てはめの良さを表す量として定義した。これを確率で表して、分布関数とする。そのためには f(x)に含まれる変数(f(x)=ax+bの時はaとbの二つが変数の数nvとして、測定点数をNmとし、Nm-nv=nを自由度という。この自由度n の時のカイ二乗がいくらになる確率がカイ二乗分布と呼ばれる。次の式でかかれる：

$$\hat{P}(\chi^2, n) = \frac{2^{\frac{-n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\chi^{n-2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

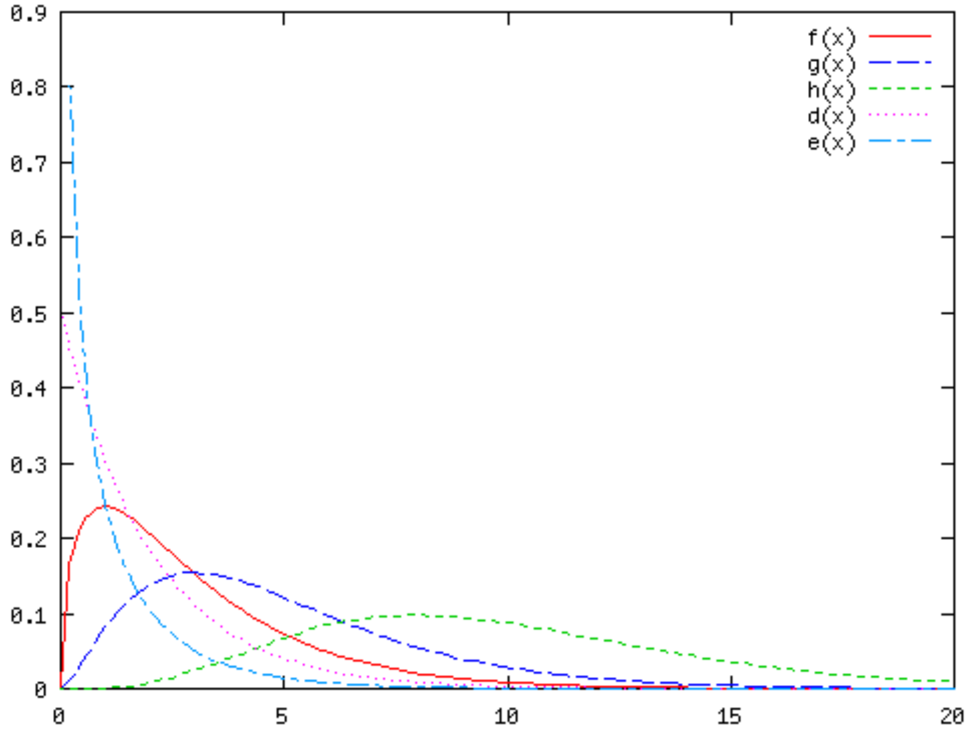
こ こで $\Gamma(\frac{n}{2})$ は ガンマ関数である。

グラフの形は、図のようであり、$n \to \infty$の極 限でガウス関数に近づく。但しそ の平均値は

$$\langle\chi^2\rangle = n$$

を満たす。ここでnは自由度である。この式 はつまりカイ 二乗の平均値は自由度程度になるべしと主張しているわけだ。従って測定点が５個あってfittingに２個の変数を使ったときは、自由度nはn=5-2= 3であり、カイ二乗を計算して３より大変小さい（たとえば０．１）とかるいは１０とかいう値を取った場合は、fitting関数f(x)が不適切と見なす べきである。あるいは定義から明らかなようにガウス分布する測定量の二乗の和は自由度nのカイ二乗分布をする。ちなみにガウス分布する測定量の和の分布は ガウス分布である。

下の図で横軸はカイ二乗で、縦軸は確率密度関数値である。
線は各n=1(d),2(e),3(f),5(g),10(h)に対応している。



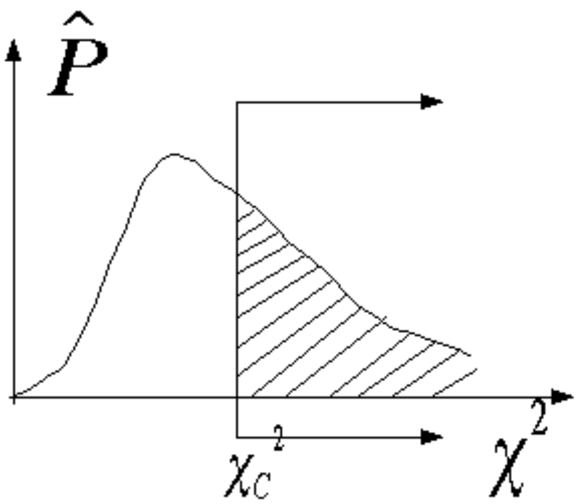
確率 $P(\chi^2;n)=\int_{\chi^2}^{\infty}\hat{P}(\chi'^2;n)d\chi'^2$ はこの式で与えられる。χ^2 が 横軸なので、これで積分する必要がある。χ^2 の値が実験結果として得られたとき、その値の平均値はn(自由度) に一致するた め、 これから遠く離れる確率は小さい。これを表すのが以下の χ^2 の表 である。

n（自由度)	確率=10%	5%	2%	1%
1	2.71	3.84	5.41	6.63
2	4.61	5.99	7.82	9.21
3	6.25	7.82	9.84	11.34
4	7.78	9.49	11.67	13.28
5	9.24	11.07	15.03	16.81
6	10.64	12.59	15.03	16.81
7	12.02	14.07	16.62	18.47
8	13.36	15.51	18.17	20.09
9	14.68	16.92	19.68	21.67
10	15.99	18.31	21.16	23.21

11	17.27	19.68	22.62	24.72
12	18.55	21.03	24.05	26.22
13	19.81	22.36	25.47	27.69
14	21.06	23.68	26.87	29.14
15	22.31	25.00	28.26	30.58
20	28.41	31.41	35.02	37.57
25	34.38	37.65	41.57	44.31
30	40.26	43.77	47.96	50.89

表の横軸10%,5%,2%,1% はそれぞれ積分された確率であり表はその確率を与える区切りとなる

χ_C^2 を あたえている。グラフでしめすと、



$P(\chi^2;n) = \int_{\chi_C^2}^{\infty} \hat{P}(\chi'^2;n)d\chi'^2$ を 満たす。例えば測定点が17点あり、fittingを直線で行うと(f(x)=ax+b) 2個の自由度がここで失われ、n=17-2=15となる。このと き χ^2 が22 であったとするなら、この結果は10%以 上の確率で起 こり、充分に良い結果として指示される。もし χ^2 が 30となると、これが起こる確率は1%程度であり、とてもまともな結果とは考えられないという尺度をあたえる。このとき、1次関数をやめて2次関数で fitして、 χ^2 が24程度になった場合、自由度は14で、その 確率は5%出 有り、改

善が認められ、１次関数より２次関数が好まれる。一方余り χ^2 が小 さい場合も危険である。本来確率密度関数のピークは< χ^2 > =nにありここから離れる事は起こりにくい。この場合、精度因子 σ_i^2 が大 きすぎる場合がある。もちろんあまりデータと理論線が近い場合はその他の理由が有るかもしれない、これを疑うべきである。

MinimumVariance Bound (MVB)と呼ばれる式の証明。

$$\sigma_{\hat{a}}^2 \geq \frac{1}{<\left(\frac{d\ln L}{da}\right)^2>} = \frac{-1}{<\left(\frac{d^2\ln L}{da^2}\right)>}$$

$< \hat{a} >= \int \hat{a} L dX = a : \lim_{N\to\infty} (\hat{a} - a) = 0$ 推 定のよりどころが、この式である。

よって $\frac{d<\hat{a}>}{da} = 1 = \frac{d}{da}\int \hat{a} L(x_1, x_2, \ldots x_N : a) dX = \int \hat{a}\frac{dL}{da} dX$ 一 般に $\frac{dL}{da} = L\frac{d(\ln L)}{da}$ な ので

$$\int \hat{a}\frac{dL}{da} dX = \int \hat{a} L \frac{d(\ln L)}{da} dX$$

ま た確率の定義より、

$$\int L dX = 1 \Rightarrow \frac{d}{da}\int L dX = \int \frac{dL}{da} dX = \int L \frac{d(\ln L)}{da} dX = < \frac{d(\ln L)}{da} >= 0$$

よって

$$\int (\hat{a} - a) L \frac{d(\ln L)}{da} dX = 1 - 0 = 1$$

と いう関係式が得られる。

Schwarzの式：$\iint u^2 dX \iint v^2 dX \geq \left(\iint uv dX\right)^2$ があるので、（例えば

$u = x^2, v = y^2, \iint x^2 dxdy \iint y^2 dxdy = (\frac{1}{3}x^3 y)(\frac{1}{3}xy^3) = \frac{1}{9}x^4 y^4$ よっ て$\left(\iint xy dxdy\right)^2 = \frac{1}{16}x^4 y^4$ $\frac{1}{9}x^4 y^4 > \frac{1}{16}x^4 y^4$ 式 は成立つ。この式

$$u = (\hat{a} - a)\sqrt{L}, v = \frac{d \ln L}{da}\sqrt{L},$$

$$\left(\int (\hat{a} - a)^2 L dX\right)\left(\int \left(\frac{d \ln L}{da}\right)^2 L dX\right) \geq 1$$

$$\int (\hat{a} - a)^2 L dX = \sigma_{\hat{a}}{}^2, \int \left(\frac{d \ln L}{da}\right)^2 L dX = < \left(\frac{d \ln L}{da}\right)^2 >$$

は

$$\sigma_{\hat{a}}{}^2 \left\langle \left(\frac{d \ln L}{da}\right)^2 \right\rangle \geq 1; \sigma_{\hat{a}}{}^2 \geq \frac{1}{\left\langle \left(\frac{d \ln L}{da}\right)^2 \right\rangle}$$

をしめす。

$$\left\langle \frac{d \ln L}{da} \right\rangle = 0 = \int L \frac{d \ln L}{da} dX = \int \left(\frac{dL}{da}\frac{d \ln L}{da} + L \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right) dX$$

$$\int \left(\frac{dL}{da}\frac{d \ln L}{da} \right) dX = \int \left(L \frac{d \ln L}{da}\frac{d \ln L}{da} \right) dX = \int \left(L \left(\frac{d \ln L}{da} \right)^2 \right) dX = \left\langle \left(\frac{d \ln L}{da} \right)^2 \right\rangle$$

$$\int \left(L \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right) dX = \left\langle \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right\rangle$$

$$0 = \left\langle \left(\frac{d \ln L}{da} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right\rangle$$

2番目の等号の証明

$$\left\langle \left(\frac{d \ln L}{da} \right)^2 \right\rangle = -\left\langle \frac{d^2 \ln L}{da^2} \right\rangle$$

物理実験学　　(7)

竹下徹　(03july2002)

信頼度：

ガウス分布する量 x が有り、平均値を＜ x ＞、標準偏差をs とするとき、　この分布から一つ取り出しその値yが　[<x>-s]≦ y ≦[<x>+s] の間に入る確率は68％である。これを信頼度68％であると言う。同様にガウス分布する場合95％の信頼度の区間は、[<x>-2s]≦ y ≦[<x>+2s] である。また[<x>-2.58s]≦ y ≦[<x>+2.58s] を満たすときは99％信頼度である。式で表すと、

$$P(x_- < x < x_+) = \int_{x_-}^{x_+} \hat{P}(x)dx$$

これは両側で取った場合である。片側の場合は、

$$P(x < x_+) = \int_{-\infty}^{x_+} \hat{P}(x)dx$$

のとき、上限が信頼度 $P(x< x_+)$ で存在し、

$$P(x > x_-) = \int_{x_-}^{\infty} \hat{P}(x)dx$$

のときは、下限が信頼度 $P(x > x_-)$ で存在する。ガウス分布を仮定し片側ののみ考えるとき、84％信頼度でx<x+sである。また信頼度９０％である区間はx<1.29sである。

仮説と検定 :

我々は実験を行いその結果がある理論で説明できるかどうかに興味がある。またその理論に含まれるパラメータの値を実験により決定する事が目的であることが多い。しかしパラメータは通常実数値であり、「値はいくらである」という結果はあり得ない。実数だから、いくらからいくらの間にある（実は、いくらの確率で）としか我々は結論できない。そう普通我々はこれこれの実験を行い、なになにを測定し、　x +- dx である、と結論するときは、　測定値はxであったとしても、　通常　x-dx < x < x +dx に入る確率は68％であると結論しているのだ。

仮説は、例えば　仮説　　H0 「この測定値 x +- dx が予言される値　A と等しい」　という風にたてる。そしてこれをテスト（検定）する、つまり実験により測定される未知のパラメータの値について「この測定値が予言される値と等しい」という仮説が棄却されるかどうかをみ

る。これを仮説検定あるいは検定(test)という。もしこの仮説が正しいなら　x　はガウス分布すると仮定すると、　信頼区間を９９％に設定すれば、Aが　　　[x-2.58dx]≦A≦[x+2.58dx] を満たせば、　仮説が成り立つと考えられるし、反対に　成り立たない場合つまり [x-2.58dx]>A かあるいはA＞[x+2.58dx]のときは、仮説　「この測定値 x +- dx が予言される値　A と等しい」　は棄却される。この論理が実際仮説検定でどのように使われるかを分散 σ^2 の値が判っているガウス分布において平均値 μ について仮説検定について説明する。これは単なる長さの測定といった測定が想定され、測定は複数の測定データからなる、これをxiとするi=1,2,3,...n。仮説H0：

$$\mu = \mu_0 : \mu_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

の検定を考える。μ が未知の値であり仮説は $\mu = \mu_0$ である。H0が真であるときデータの平均 μ_0 はガウス分布（平均値 μ ,分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ ）に従うはずである。理論的結論は分布であり、実験が得る結論は値　たとえば $(\mu - \mu_0)$ である。つまり分布と１点の値を比較することになる。その比較は実際に得られた（統計）量が分布図においておきやすい値であるのか、おきにくい値であるのかを見ることになる。もしおきにくい値であるなら理論分布と実験結果は食い違っていると判断し、H0を棄却する。具体的には小さな確率αを設定し、この領域を棄却域と呼ぶ。H0が真であるなら実験値がこの棄却域に落ちる確率はたかだかαであり、この領域に落ちることはほとんど無いと言うことを表している。従って現実に得られる値を計算し実験値が棄却域の中におちれば　仮説　H0を棄却する。反対に現実に得られた値つまり実験値が棄却域の外におちれば　仮説　H0を棄却しない、という判定をおこなう。この判定にもちいられる小さい確率αは有意水準または危険率と呼ばれる。通常　0.05　あるいは0.01が使われる。こうして得られる検定を有意水準αの検定という。有意水準α=0.05でガウス分布が対象の場合棄却域を両側に設けるとすると

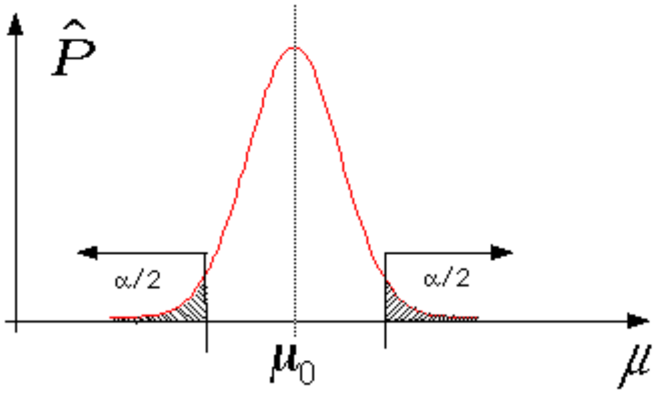
$$\left| \frac{(\mu - \mu_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| > 1.96$$

のときH0を棄却する。反対に

$$\left| \frac{(\mu - \mu_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \leq 1.96$$

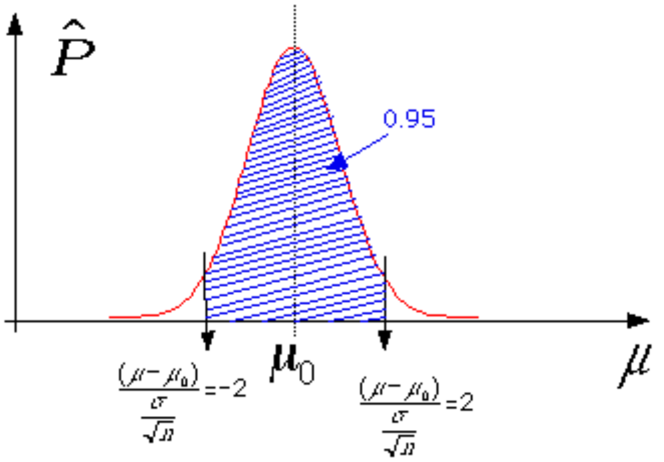
のときH0を棄却しない。この仮説検定において「仮説を棄却しない」ということを仮説が正しいと主張するものでは有りませんので、混同しないでください。あくまでこの意味は仮説を棄却する根拠は十分ではないというだけです。一般に仮説が正しい事を示すにはさまざまな角度からの検討が必要であり、まず不可能に近い。これに対して、仮説が疑わしいことはデータをもちいて示すことが比較的容易である。ですから仮説検定にもちいる仮説としては、疑わしいと思うことを仮説として採用し検定を行うべきである。この意味において検

定しようとする仮説を帰無仮説という。また有意水準αを小さな値に取ることもこの帰無仮説を取ることによる。仮説検定において仮説H0が有意水準αの検定で棄却されるとき、、仮説H0は有意水準αで有意であるという。また棄却されるときは、仮説H0は有意水準αで有意でないという。



逆に上の図の内側に入る場合は有る信頼度で区間推定を行うことができる。それは、例えばガウス分布に従うデータがあり、その分散 σ^2 が判っているときに平均値を推定する場合を考えよう。n個のデータ　xi から平均 <x>を得ることができる。さて測定値から得れられるガウス分布の中心値の推定はもちろん $\hat{\mu} = \langle x \rangle$ である。さらにその推定値の精度を求めよう。推定値 $\hat{\mu}$ は中心値<x>, 分散 $\frac{\sigma^2}{n}$ でガウス分布するので、推定値 $\hat{\mu}$ は確率68％で区間　[<x> - $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$] < $\hat{\mu}$ < [<x> + $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$] にある。また確率95％で　[<x> - 2 $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$] < $\hat{\mu}$ < [<x> +2 $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$] にある。この確率のことを信頼度（=1-α）とよぶ。またこの区間を信頼区間という。

式で表すと、
$$P([\langle x \rangle - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}] < \hat{\mu} < [\langle x \rangle + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}]) = 0.68$$
$$P([\langle x \rangle - 2\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}] < \hat{\mu} < [\langle x \rangle + 2\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}]) = 0.95$$
とかける。



さてカイ２乗分布はガウス分布する量の２乗和（たとえば精度は２乗で伝搬する）の分布であることは述べた。この分布に従う量に関して検定を行うことがある。例えばガウス分布するデータ　x1,x2,x3,,,,xnからこのデータを取り出す元の分布（母集団という）の分散を推測するときである。仮説H0は母集団の分散 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ （ある定まった値）であり、データから得られる２乗和をSとして、 $S = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \langle x \rangle)^2$ 、 $\frac{S}{\sigma_0^2}$ は自由度(n-1)のカイ２乗分布に従うことが知られている。従って $\frac{S}{\sigma_0^2}$ を適当に棄却域を設定して検定すればよい。例えば仮説H1： $\sigma^2 > \sigma_0^2$ をたててH0が間違っていることを考察するばあい、 $\frac{S}{\sigma_0^2}$ は大きな値を取ることが予想される。従ってH1が正しいときは棄却域を全部右に持って来る。よって検定は

$$\frac{S}{\sigma_0^2} > \chi^2(n-1,\alpha)$$

とする。これは次の図に対応する。

この反対に σ^2 の信頼区間を求めるには $\frac{S}{\sigma_0^2}$ が自由度(n-1)のカイ２乗分布に従う事をもちいて

$$P(\chi^2(n-1,1-\frac{\alpha}{2}) < \frac{S}{\sigma^2} < \chi^2(n-1,\frac{\alpha}{2})) = 1-\alpha$$

が得られる。式を変形すると、

$$P(\frac{S}{\chi^2(n-1,\frac{\alpha}{2})} < \sigma^2 < \frac{S}{\chi^2(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}) = 1-\alpha$$

より σ^2 の信頼度1-αの信頼区間は $\frac{S}{\chi^2(n-1,\frac{\alpha}{2})}$ から $\frac{S}{\chi^2(n-1,1-\frac{\alpha}{2})}$ までとなる。